24. oktober, 2013

MAT-INF 1100: Obligatorisk oppgave 2

Innleveringsfrist: 7/11-2013, kl. 14:30

Informasjon

Den skriftlige besvarelsen skal leveres i obligkassa som står i gangen utenfor ekspedisjonen i 7. et. i Niels Henrik Abels hus senest *kl. 14.30 torsdag 7/11*. Besvarelsen *skal* være skrevet av deg selv, for hånd eller på datamaskin. Programmet i oppgave 3d leveres som utskrift fra skriver. Pass på at besvarelsen er ryddig ført og oppgavene skrevet i riktig rekkefølge slik at den som retter finner og forstår alt som blir levert.

Studenter som blir syke eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse for denne obligatoriske oppgaven, må ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (7. et. Niels Henrik Abels hus, telefon 22 85 58 88, e-post: studieinfo@math.uio.no) i god tid før innleveringsfristen.

Det er både lurt og lærerikt å samarbeide med andre i arbeidet med oppgavene, og gruppelærerne har anledning til å hjelpe, men ikke med ferdige løsninger. Målet med den obligatoriske oppgaven er at dere skal lære, men *den endelige besvarelsen som du leverer skal utarbeides av deg selv, og du må kunne redegjøre for innholdet ved en eventuell muntlig høring (aktuelt ved mistanke om avskrift).*

Husk at de to obligatoriske oppgavene i MAT-INF 1100 begge må bestås for å kunne gå opp til endelig eksamen i kurset. *For å få bestått på denne andre obligatoriske oppgaven må du gjøre seriøse løsningsforsøk på alle oppgavene, og minst seks av de ti deloppgavene bør være riktig besvart.*

Hvis du har samarbeidet nært med noen, er det fint om du skriver vedkommendes navn her:

Oppgaver

Oppgave 1. Ved hjelp av en GPS har vi målt farten v til et objekt som beveger seg. Målingene er gjort ved $N+1$ tidspunkter $(t_i)_{i=0}^N$ slik at resultatet er en følge av tall-par $(t_i, v_i)_{i=0}^N$ der v_i angir farten ved tidspunktet t_i.

a) Gi en algoritme for å beregne en tilnærming til objektets akselle-rasjon $a(t) = v'(t)$ ut fra de beregnede verdiene (t_i, v_i) av farten.

b) Gi en algoritme for å beregne en tilnærming til objektets avstand fra startpunktet $s(t)$ ut fra de beregnede verdiene når $v(t) = s'(t)$ og $s(t_0) = 0$.

c) (Frivillig.) Test algoritmene i (a) og (b) på et datasett, se `http://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT-INF1100/h13/obligatoriske-oppgaver/oblig2oppg1.pdf`

Oppgave 2. Vi har differensialligningen

$$x' - x^2 = 1, \quad x(0) = 1. \tag{1}$$

a) Finn løsningen $x(t)$ av differensialligningen analytisk. (Hint: Ligningen er separabel.)

b) Løs ligningen numerisk på intervallet $[0, 0.6]$ ved å ta 6 steg med Eulers metode (med kalkulator eller datamaskin). Plott den numeriske løsningen sammen med den eksakte løsningen (for hånd eller ved hjelp av datamaskin).

c) Gjenta (b), men bruk Eulers midtpunktmetode i stedenfor Euler's metode. Plott den numeriske løsningen du nå får sammen med løsningene du plottet i (b).

d) Et alternativ til de to metodene over er som følger. Anta at vi skal løse $x' = f(t, x)$. Den nye metoden er basert på at steget fra tilnærmingen (t_k, x_k) til tilnærmingen (t_{k+1}, x_{k+1}) beregnes ved

$$x_{k+1} = x_k + hf\big(t_k + h/2, (x_{k+1} + x_k)/2\big).$$

For ligningen (1) gir dette

$$x_{k+1} = x_k + h\left(1 + \frac{(x_k + x_{k+1})^2}{4}\right). \tag{2}$$

Denne ligningen kan løses med hensyn på x_{k+1}, noe som gir

$$x_{k+1} = \frac{2 - hx_k - 2\sqrt{1 - h^2 - 2x_k h}}{h} \tag{3}$$

Lag en algoritme som beregner x_{k+1} ved hjelp av denne formelen. Er det noen begrensninger på hvilken h som kan brukes?

Gjør 6 steg som for de andre metodene, og legg også denne løsningen inn i det samme plottet som de andre løsningene. Hvilken metode ser ut til å fungere best?

e) (Frivillig.) Ligningen (2) har to løsninger, og i (3) plukker vi ut en av disse. Forklar hvorfor vi ikke velger den andre løsningen.

Oppgave 3. I denne oppgaven skal du effektivisere trapesmetoden. Du skal utføre numerisk integrasjon med trapesmetoden på intervallet $[a, b]$ ved å beregne en følge av tilnærminger I_0, I_1, I_2, ... For tilnærming I_n skal $[a, b]$ deles i 2^n like store deler, funksjonen f tilnærmes med sekanten på hvert delintervall, og integralet av f tilnærmes ved hjelp av integralet av sekanten.

a) Vis at dette gir

$$I_n = h\left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{2^n-1} f(a + ih)\right), \tag{4}$$

den såkalte trapesregelen.

b) Noen av funksjonsverdiene som inngår i beregningen av I_n inngår også i beregningen av I_{n-1}, forklar hvilke disse er.

Hint: Lag en tegning som viser funksjonsverdiene som inngår i I_0, I_1, I_2 og I_3.

c) La h være steglengden ved beregning av I_n. Forklar hvorfor

$$I_n = \frac{I_{n-1}}{2} + h \sum_{i=1}^{2^{n-1}} f\big(a + (2i - 1)h\big). \tag{5}$$

Hvordan kan denne formelen utnyttes til å unngå å beregne funksjonsverdier på nytt når vi regner ut I_1, I_2, ...?

d) På fila `trapes.py` finner du et Python-program som beregner en tilnærming til $\int_0^1 \cos x\, dx$ med relativ feil mindre enn 10^{-12}, basert på formelen (4). Skriv om programmet slik at det utnytter formelen (5). Hva er fordelen med det nye programmet i forhold til det opprinnelige?

Lykke til!!