1.1 5e) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\frac{1}{81}-\frac{1}{243} = \sum_{k=0}^{5}(-1)^k\frac{1}{3^k}$

$\frac{1}{3^0}-\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{3^5}$ $\quad = \sum_{k=0}^{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^k$

6a) $\sum_{k=0}^{8}(2k+3) = \sum_{n=1}^{9}\left(2(n-1)+3\right) = \sum_{n=1}^{9}(2n+1)$

$n=k+1$

$k=n-1$

1.2.5

Vi skal vise: P_n : n^5-n er delelig med 5

Vi viser først: P_1 : $1^5-1=0$, som er delelig med 5.

P_1 er derfor sann.

Anta vi har vist $P_1, P_2, \dots, P_n$. Vi skal nå vise P_{n+1} er sann.

: P_{n+1} : $(n+1)^5-(n+1)$ er delelig med 5 (?)

$$(n+1)^5-(n+1) = \underline{\underline{n^5}}+5n^4+10n^3+10n^2+5n\underline{+1}\underline{\underline{-n}}\underline{-1}$$

$$= n^5-n+5n^4+10n^3+10n^2+5n$$

$$= \underbrace{n^5-n}_{\text{delelig med } 5\ (P_n)} + \underbrace{5(n^4+2n^3+2n^2+n)}_{\text{delelig med } 5}$$

$\Rightarrow$ $(n+1)^5-(n+1)$ er delelig med 5 $\Rightarrow$ P_{n+1} sann

$n+1$	1	1				
$(n+1)^2$	1	2	1			
$(n+1)^3$	1	3	3	1		
$(n+1)^4$	1	4	6	4	1	
$(n+1)^5$	1	5	10	10	5	1

1.2.10

a)

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 = 1^2 && 1 \text{ ——''——} \\
1+3 &= 4 = 2^2 && 2 \text{ ——''——} \\
1+3+5 &= 9 = 3^2 && 3 \text{ ——''——} \\
1+3+5+7 &= 16 = 4^2 && 4 \text{ første ——''——} \\
1+3+5+7+9 &= 25 = 5^2 && 5 \text{ første oddetall}
\end{aligned}
$$

P_n: summen av de n første oddetallene er n^2

b) Vi viste i a) at P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 er sanne

Vi skal vise: $\underbrace{P_{n+1} \text{ er sann}}$ når $P_1, \ldots, P_n$ er sanne.

summen av de $(n+1)$ første oddetallene er $(n+1)^2$

oddetall nr. n er $2n-1$ oddetall nr. $n+1$ er $2n+1$

summen av de $n+1$ første oddetall $= 1+3+\cdots+(2n+1)$

$$= \underbrace{\left(1+3+\cdots+(2n-1)\right)}_{\text{sum av } n \text{ første oddetall}} + 2n+1$$

$$= \underbrace{n^2}_{P_n} + 2n + 1 = (n+1)^2$$

$\Rightarrow$ P_{n+1} er sann

1.2.11 $f(x) = e^{x^2}$

Vi skal vise P_n: $f^{(n)}(x) = p_n(x) e^{x^2}$, for et n'te gradspolynom p_n

P_0: $f^{(0)}(x) = f(x) = e^{x^2} = \underbrace{1}_{p_n(x)=1} \cdot e^{x^2} \Rightarrow P_0$ er sann

, er et 0'te gradspolynom.

P_1: $f^{(1)}(x) = (e^{x^2})' = \underbrace{2x}_{p_n(x)=2x} e^{x^2} = p_n(x) e^{x^2} \Rightarrow P_1$ er sann

, er et 1'te gradspolynom.

anta vi har vist P_n, dvs. at $f^{(n)}(x) = p_n(x) e^{x^2}$, p_n n'te grad.

vi skal vise P_{n+1}, dvs at $f^{(n+1)}(x) = p_{n+1}(x) e^{x^2}$, p_{n+1} er grad n+1

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = \left(p_n(x) e^{x^2}\right)' = p_n'(x) e^{x^2} + p_n(x) \cdot 2x e^{x^2}$$

$$= \underbrace{\left(2x\, p_n(x) + p_n'(x)\right)}_{p_{n+1}(x)} e^{x^2}$$

. Denne har grad n+1, siden $2x \underbrace{p_n(x)}_{\text{grad } n}$ har grad n+1, $p_n'(x)$ grad n-1

Derfor er P_{n+1} sann

c.