1.4.8

a) Vi skal bruke binomialformelen til å vise at $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

b) $\binom{n}{k}$ forskjellige måter å plukke ut k elementer fra n stk.

totale antall delmengder $= 2^n$

$\quad \parallel$

$\sum_{k=0}^{n}$ antall delmengder med k elementer $= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

$$\binom{34}{7} = \frac{34 \cdot 33 \cdots 28}{1 \cdot 2 \cdots 7}$$

2.1.9 Vi skal vise: $|x-y| = |(x-z)+(z-y)| \underset{\text{trekantulikheten}}{\leq} |x-z| + |z-y|$

2.2.5

a) Summen av to irr. tall er alltid irrasjonal?

$\sqrt{2} + (3-\sqrt{2}) = 3$ $\quad$ $\underline{a + (-a) = 0}$

b) Hvis a er irrasjonal, så er $-a$ det også? Ja!
Anta for motsigelse at $-a$ er rasjonal. Da er
$a + (-a) = 0$, som er rasjonalt.
Men vi vet (korollar 2.2.2) at summen av et rasjonalt og et irrasjonalt tall er irrasjonalt. $\Rightarrow$ motsigelse.

c) Hvis a^2 er rasjonal, så er a det også?
$a = \sqrt{2}$, $a^2 = 2$ rasjonal

d) Hvis a^2 er irrasjonal, så er a det også? riktig.
Anta a rasjonal. Da er a^2 rasjonal, $a = \frac{b}{c}$, $a^2 = \frac{b^2}{c^2}$
selvmotsigelse

e) Hvis a er irrasjonal, så er $\frac{1}{a}$ det også? riktig.
Anta for motsigelse at $\frac{1}{a}$ er rasjonal, dvs $\frac{1}{a} = \frac{b}{c} \Rightarrow a = \frac{c}{b}$
$\Rightarrow a$ rasjonal, selvmotsigelse.

2.2.8 Vi antar for motsigelse at $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$,

og at $a = p_1 p_2 \cdots p_n$, $b = q_1 q_2 \cdots q_m$

primtall

a) $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b} \Rightarrow 2 = \dfrac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2$

$(p_1 p_2 \cdots p_n)^2 = 2(q_1 q_2 \cdots q_m)^2$

$p_1 p_1 p_2 p_2 \cdots p_n p_n = 2\, q_1 q_1 q_2 q_2 \cdots q_m q_m$

b) La r være antall tall blant $p_1 p_2 \cdots p_n$ som er lik 2,

La s være antall tall blant $q_1 q_2 \cdots q_m$ som er lik 2.

Antall 2-tall på venstre side: $2r$

Antall 2-tall på høyre side: $2s+1$

Vi har derfor forskjellig antall forekomster av tallet 2 på venstre og høyre side, siden $2r \neq 2s+1$, uansett hva r, s er.

c) Aritmetikkens fundamentalteorem: ethvert tall har en unik faktorisering i et produkt av primtall.

Hvis $\sqrt{2}$ var rasjonalt ville vi har få to forskjellige faktoriseringer (VS og HS), med forskjellige antall 2-tall.

2.4.4 Definer 2 ved $2 = 1+1$, skal vise: $a+a = 2a$

$$
\begin{aligned}
a + a &\overset{A4}{=} a\cdot 1 + a \cdot 1 \\
&\overset{A3}{=} a\cdot(1+1) = a\cdot 2 \\
&\overset{A1}{=} \underline{\underline{2a}}
\end{aligned}
$$