4.2.2 e på standardform, 4 siffer for signifikant

$e = 2.718281828\ldots$

signifikand: skal være mellom 0.1 og 1

$e = 0.2718281828\ldots \times 10^1$

med 4 siffer: 0.2718×10^1

5.3.6

På maskinen ble tall representert i 10-dels sekund.
(1 sek = 10 tidels sek)

Problem: omregning fra antall tidels sek. til antall sek.
skjer ved at vi ganger med 0.1
0.1 kan ikke representeres eksakt i totallsystemet.
maskinen gjør en avrunding, og bruker bare 23 bits.

første 23 bit i 0.1 :

$$0.000\underbrace{1100}\underbrace{1100}\underbrace{1100}\underbrace{1100}\underbrace{1100}\overbrace{\underbrace{1100}}^{12} = \cdots = \frac{209715}{2097152}$$

kan regnes ut med alg. 3.20

(lett å se at er lik 0.1×2^{-20})

a) abs. feil $= \left| \frac{209715}{2097152} - 0.1 \right| \approx \underline{\underline{9.5367 \times 10^{-8}}}$

rel. feil $= \left| \frac{\frac{209715}{2097152} - 0.1}{0.1} \right| \approx \underline{\underline{9.5367 \times 10^{-7}}}$

b) c = 209715/2097152
while not ready
  $t = t + i_t * c$

| i_t : inkrementet i maskinens interne klokke.

Anta at $i_t = 1$ hele tiden. Da vil koden bli kjørt hvert tidels sek.
Hver iterasjon: $t = t + c$. For hver iterasjon gjør vi avrundingsfeil på 9.5367×10^{-8} (absolutt)

For 1 time: løkka gjør $3600 \times 10 \times 9.5367 \times 10^{-8}$

≈ 0.0034332 s.

Etter 100 timer: ≈ 0.34332 s.

c) Hvordan unngå denne avrundingsfeil :
while not ready
  $t = t + i_t$
dividér t med 10, ved å bruke alg. 3.20

4.1.3 b) (Kalkulus)

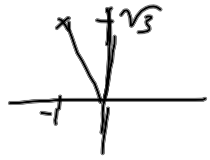
$x_{n+2}+2x_{n+1}+4x_n=0$ kar. likning $r^2+2r+4=0$

$$r=\frac{-2\pm\sqrt{4-16}}{2}=-1\pm i\sqrt{3}$$

Vi velger $r=-1+i\sqrt{3}$

modulus: $\rho=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$

argument: $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3} \Rightarrow \theta=\frac{2\pi}{3}$



Setning 4.1.16: generell løsning er

(C generell kompleks) $x_n=Cr^n+\bar{C}\bar{r}^n=C(-1+i\sqrt{3})^n+\bar{C}(-1-i\sqrt{3})^n$

(E,F generelle, reelle) $x_n=E\rho^n\cos n\theta+F\rho^n\sin n\theta=E2^n\cos\left(n\frac{2\pi}{3}\right)+F2^n\sin\left(n\frac{2\pi}{3}\right)$

4.1.9

Siden første siffer skal være 1 : $\underline{\underline{a_1 = 1}}$

Siden neste siffer ikke kan være 1 hvis forrige var 1, så er også $\underline{\underline{a_2 = 1.}}$ (eneste mulighet er 10)

Hvorfor er $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n > 2$?

Alle sekvenser av lengde n kan splittes i to kategorier:

1. de som slutter med 0. Da kan de første n-1 sifrene velges vilkårlig $\Rightarrow a_{n-1}$ muligheter
2. de som slutter med 1 $\Rightarrow$ må slutte med 01
   Da kan de første n-2 sifrene velges vilkårlig $\Rightarrow a_{n-2}$ muligheter

Derfor: $\underline{\underline{a_n = a_{n-1} + a_{n-2}}}$, $n > 2$

differenslikningen kan skrives $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0 \Rightarrow r^2 - r - 1 = 0$

$\Rightarrow r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

derfor: $a_n = C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

sett $a_1 = 1$: $C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$

$a_2 = 1$ $\quad C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1$

$\Rightarrow \quad C(1+\sqrt{5}) + D(1-\sqrt{5}) = 2$

$C(3+\sqrt{5}) + D(3-\sqrt{5}) = 2$

trekk disse fra hverandre $\rightarrow 2C + 2D = 0 \Rightarrow D = -C$

sett så inn i første likning: $2C\sqrt{5} = 2 \Rightarrow \underline{\underline{C = \frac{\sqrt{5}}{5}}}$, $\underline{\underline{D = -\frac{\sqrt{5}}{5}}}$

$$\underline{\underline{a_n = \cdots = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)}}$$

S.2.2 x^4+2

x^2+x^4

$\frac{x}{1+x^2}$

arcsin er den omvendte funksjonen til sin ($\sin^{-1}$)

$\frac{1}{2}+\sin(-x^2) \rightarrow$ det er mulig at $\sin(-x^2)=-\frac{1}{2}$

$-x^2=\arcsin(-\frac{1}{2})+2k\pi$

$\Rightarrow$ kansellering.

Hvilket uttrykk kan gi stor relativ avrundingsfeil?

S.2.6 b) $9.834+2.45 \rightarrow \underline{0.2450}\times 10^1$

størst $=\underline{0.9834}\times 10^1$ på standard form

legg sammen signifikander: $0.9834+0.2450=1.2284$

sum $=1.2284\times 10^1 = \underline{\underline{0.1228\times 10^2}}$. Gjorde en avrunding

S.4.1 a) $\frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{(5-\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{\underbrace{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}_{25-5=20}} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \cdots = \frac{3}{2}$

S.4.2 c) når kan $\cos^2 x - \sin^2 x$ gi avrundingsfeil?

kanselleering når $\cos x$ er nær $\sin x$, dvs når x er nær $\frac{\pi}{4}$

a) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ er nær 0 når x er stor.

$= \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \to 0$ når $x \to \infty$