4.2.21 $c_0 = 1$. K = konsentrasjon av salt i spuingen

a) Vi har at
$$c_n = \underbrace{\left(1-\frac{S}{V}\right)}_{\text{andel gammelt vann}} c_{n-1} + \underbrace{\frac{S}{V}}_{\text{andel nytt vann}} K$$

andel gammelt vann, har saltkons. c_{n-1}

andel nytt vann har saltkons. K

dette gir da saltkonsentrasjon i det nye vannet (siden vi "vekter" andelene fra gammelt og nytt vann)

b) Vi setter $K = 0.1$, $V = 100$, $S = 10$

$$\Rightarrow c_n = \left(1 - \frac{10}{100}\right) c_{n-1} + \frac{10}{100}\, 0.1 \Rightarrow c_n - 0.9\, c_{n-1} = 0.01$$

(dere er vant til å skrive dette på formen ($c_{n+1} - 0.9\, c_n = 0.01$))

kar. likning: $r - 0.9 = 0 \Rightarrow r = 0.9$ (homogen likning $c_n - 0.9\, c_{n-1} = 0$)

partikulær løsning c_n^p: Vi prøver med $c_n^p = A$:

$$A - 0.9A = 0.01 \Rightarrow 0.1A = 0.01 \Rightarrow A = 0.1$$

generell løsning: $c_n = c_n^p + c_n^h = 0.1 + B(0.9)^n$

Initialkrav: $c_0 = 1 \Rightarrow 1 = 0.1 + B(0.9)^0 \Rightarrow B = 0.9$

$$\Rightarrow c_n = 0.1 + 0.9(0.9)^n = 0.1 + (0.9)^{n+1}$$

Til slutt vil vi finne n slik at $c_n = \frac{1}{2} c_0 = \frac{1}{2}$

$$c_n = 0.1 + (0.9)^{n+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow (0.9)^{n+1} = 0.4 \Rightarrow (n+1)\ln 0.9 = \ln 0.4$$

$$n+1 = \frac{\ln 0.4}{\ln 0.9} \Rightarrow n = \frac{\ln 0.4}{\ln 0.9} - 1 \Rightarrow n \approx 7.69.$$

Vi må dermed velge $\underline{\underline{n \geq 8}}$

4.2.5 b) $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 9n$ $\qquad x_0 = x_1 = 3$

kar. likning: $r^2 - 6r + 8 = 0 \Rightarrow r = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = 3 \pm 1$

røtter: $r_1 = 2$, $r_2 = 4$. Gen. løsning homogen likning: $x_n^h = C2^n + D4^n$

partikulær løsning: Vi gjetter $x_n^p = An + B$

$x_{n+2}^p - 6x_{n+1}^p + 8x_n^p = 9n$

$(A(\underline{n}+\underline{\underline{2}}) + \underline{\underline{B}}) - 6(A(\underline{n}+\underline{\underline{1}}) + \underline{\underline{B}}) + 8(A\underline{n} + B) = 9n$

$(A - 6A + 8A)n + 2A + B - 6A - 6B + 8B = 9n$

$3An - 4A + 3B = 9n$

Vi må ha: $3A = 9 \Rightarrow A = 3$

$-4A + 3B = 0 \Rightarrow -12 + 3B = 0 \Rightarrow B = 4$

$\Rightarrow x_n^p = An + B = \underline{3n + 4}$

Generell løsning: $x_n = x_n^h + x_n^p = C2^n + D4^n + 3n + 4$

$x_0 = 3$: $C + D + 4 = 3$ $\qquad C + D = -1$ $\qquad C = 0,\ D = -1$

$x_1 = 3$: $2C + 4D + 3 + 4 = 3 \Rightarrow 2C + 4D = -4$ $\qquad$ (Legg $-2 \times$ første likning til andre likning) $2D = -2$

$\Rightarrow x_n = \underline{\underline{-4^n + 3n + 4}}$

6.5.7 $x_{n+2} - \frac{5}{2}x_{n+1} + x_n = 0 \qquad x_0 = 1, \ x_1 = \frac{1}{2}$

$$r^2 - \frac{5}{2}r + 1 = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow r_1 = 2, \quad r_2 = \frac{1}{2}$$

$$x_n = C2^n + D\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_0 = 1 & C + D = 1 \\ x_1 = \frac{1}{2} & 2C + \frac{1}{2}D = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \cdots \Rightarrow D = 1, \ C = 0$$

$$\Rightarrow \underline{x_n = 2^{-n}}$$

Vi simulerer: $x_{n+2} = \frac{5}{2}x_{n+1} - x_n \qquad x_0 = 1, \ x_1 = \frac{1}{2}$.

Ingen avrundingsfeil i koeffisientene eller initialbet.

4.2.18 . X_n = beløp etter n år

startbeløp på konto

a) $X_{n+1} = \underbrace{1{,}06\, X_n}_{\text{forrentning, fra forrige år}} - \underbrace{(1{,}02)^n a}_{\text{uttak på slutten av året}}$ $\qquad X_0 = 10$

tar ut $(1{,}02)^n a$ pga inflasjon

b) Likningen kan skrives $x_{n+1} - 1.06 x_n = -(1.02)^n a$

homogen likning: $x_{n+1} - 1.06 x_n = 0 \qquad r - 1.06 = 0 \Rightarrow r = 1.06$

$\Rightarrow x_n^h = C\,(1.06)^n$

x_n^p: Vi prøver $x_n^p = c\,(1.02)^n$. (vi skal bestemme c)

$x_{n+1}^p - 1.06 x_n^p = -(1.02)^n a \Rightarrow c(1.02)^{n+1} - 1{,}06\, c\,(1{,}02)^n = -(1{,}02)^n a$

del med $1{,}02^n$: $c(1.02) - 1.06c = -a$

$-0.04c = -a$

derfor: $x_n^p = c\,(1{,}02)^n = \underline{25a\,(1{,}02)^n}$ $\qquad c = 25a$

generell løsning: $x_n = x_n^p + x_n^h = 25a\,(1.02)^n + C\,(1.06)^n$

initialkrav $x_0 = 10$: $10 = 25a + C \Rightarrow C = 10 - 25a$

$\Rightarrow x_n = 25a\,(1.02)^n + (10 - 25a)(1.06)^n$

Hvor stor kan a være slik at $x_n > 0$ for <u>alle</u> n?

Legg merke til at i uttrykket for x_n så vil leddet $(10-25a)(1.06)^n$ dominerer. Vi må derfor ha at $10 - 25a > 0$ for at alle $x_n > 0$

$\Rightarrow 10 > 25a \Rightarrow a < 0.4$ (400 000 kr.)

c) konto tom etter 80 år $\Rightarrow x_{80} = 0$

$25a\,(1{,}02)^{80} + (10 - 25a)(1.06)^{80} = 0$

$25a\,((1{,}02)^{80} - (1{,}06)^{80}) = -10\,(1.06)^{80}$

$\Rightarrow \dots\ a \approx 0.4193$ (419300 kr)

11.1.10

$f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 7$ i punktet 1

Vi skal finde $T_3(x)$

Vi har: $f'(x) = 4x^3 - 6x + 2$ $f''(x) = 12x^2 - 6$ $f'''(x) = 24x$

$f(1) = 1 - 3 + 2 - 7 = -7$ $f'(1) = 0$, $f''(1) = 6$, $f'''(1) = 24$

$$T_3(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

$$= -7 + 0 + \frac{6}{2!}(x-1)^2 + \frac{24}{3!}(x-1)^3$$

$$= \underline{\underline{-7 + 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3}}$$

6.5.2 a)

$$3x_{n+2}+4x_{n+1}-4x_n=0 \qquad x_0=1 \quad x_1=\frac{2}{3}$$

$$3r^2+4r-4=0 \qquad r=\frac{-4\pm\sqrt{16+48}}{6}=\frac{-4\pm 8}{6}$$

$$r_1=-2\ ,\ r_2=\frac{2}{3}$$

generell løsning $x_n = C(-2)^n + D\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$x_0=1 \qquad C+D=1$

$x_1=\frac{2}{3} \qquad -2C+\frac{2}{3}D=\frac{2}{3}$

(to ganger første likning til andre).

$$2D+\frac{2}{3}D=2+\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow D=1\ ,\ C=0$$

$$2C+2D=2 \text{ legg sammen}$$
$$-2C+\frac{2}{3}D=\frac{2}{3} \qquad 2D+\frac{2}{3}D=2+\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow x_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

pga avrundingsfeil: (både i initialverdi, og koeffisienter)

maskinen vil derfor regne ut

$$\hat{\varepsilon}_1(-2)^n+(1-\hat{\varepsilon}_2)\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\downarrow$$

$$\infty\ !$$

Derfor: Til slutt vil vi få overflow.

b) $3x_{n+1}-\frac{x_n}{3}=1 \qquad x_1=1 \qquad$ (simulerer $x_{n+1}=\frac{x_n}{9}+\frac{1}{3}$)

homogen likning: $3r-\frac{1}{3}=0 \qquad r=\frac{1}{9}$

inhomogen: Vi prøver $x_n^p=A$:

$$3x_{n+1}^p-\frac{x_n^p}{3}=3A-\frac{1}{3}A=1 \Rightarrow \frac{8}{3}A=1$$

$$\underline{A=\frac{3}{8}}$$

generell løsning: $x_n=x_n^p+x_n^h=\frac{3}{8}+C\left(\frac{1}{9}\right)^n$

$$x_1=1 \Rightarrow 1=\frac{3}{8}+C\frac{1}{9} \qquad \frac{1}{9}C=\frac{5}{8} \qquad C=\frac{45}{8}$$

$$\Rightarrow x_n=\frac{3}{8}+\frac{45}{8}\left(\frac{1}{9}\right)^n$$

maskinen vil regne ut $\frac{3}{8}+\left(\frac{45}{8}-\hat{\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{9}\right)^n \rightarrow \frac{3}{8}$