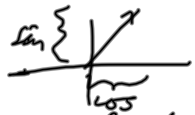
Oblig 1

Oppg 2. $x_n = \cos(x_{n-1})\sin(x_{n-2})$ $n \geq 2$, $x_0 = 3$, $x_1 = \frac{3}{2}$



Skal vise: $0 \leq x_n \leq 1$ for $n \geq 2$

$x_2 = \underbrace{\cos x_1}_{0<\cdot<1} \underbrace{\sin x_0}_{0<\cdot<1}$

$x_3 = \underbrace{\cos x_2}_{0<\cdot<1} \underbrace{\sin x_1}_{0<\cdot<1}$

$x_1 = 1.5$ ligger i første kvadrant

$\Rightarrow 0 < \sin x_1, \cos x_1 < 1$

$x_0 = 3$ ligger i andre kvadrant

$\Rightarrow 0 < \sin x_0 < 1$

$-1 < \cos x_0 < 1$

$0 < x_2 < 1$

$\Downarrow$

x_2 ligger i første kvadrant

$\Downarrow$

$0 < \cos x_2, \sin x_2 < 1$

$0 < x_2 < 1$

(siden ganger sammen to tall mellom 0 og 1.

$0 < x_3 < 1$ (av samme grunn)

anta $n \geq 4$, og at vi har vist at $0 < x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_2 < 1$

Da er $x_n = \underbrace{\cos x_{n-1}}_{0<\cdot<1} \underbrace{\sin x_{n-2}}_{0<\cdot<1} \Rightarrow 0 < x_n < 1$

siden $0 < x_{n-1}, x_{n-2} < 1$ så er $0 < \cos x_{n-1}, \sin x_{n-1}, \cos x_{n-2}, \sin x_{n-2} < 1$

$\rightarrow$ siden ligger i første kvadrant

Oppg. 2 Vi regner ut $1.0 + 2^{-n}$

Denne har $n+1$ siffer i signifikanden.

$\left(n = 1 : \underbrace{1.0 + 2^{-1}}_{\substack{2^0 + 2^{-1} \\ d_0 \quad d_{-1}}} = 1.1_2\right.$, to siffer

$(n = 2 : 1.0 + 2^{-2} = 1.01_2$, tre siffer)

Maskinen bruker et visst antall bits for signifikanden, som blir representert som $0.\underbrace{100000\ldots\ldots1}_{n+1 \text{ tall}}$

for n stor nok så vil den siste eneren bli borte pga avrunding.

Oppg. 4 $\quad ax^2 + bx + c = 0$

Løsninger: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

1. $a=0$: formlene gir ikke mening.

ny formel: $bx + c = 0 \Rightarrow x = -\frac{c}{b}$

ingen store relative avrundingsfeil

2. Vi er bare interessert i reelle løsninger, slik at $b^2-4ac > 0$

3. Kansellering i teller (subtraksjon av to store tall når $|b|$ er mye større enn $4|a||c|$.)

($\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ liten når x er stor), $|b|$ omtrent like stor som $\sqrt{b^2-4ac}$

a) $b > 0 \Rightarrow -b < 0 \Rightarrow$ kansellering i x_2 ($-b + \sqrt{b^2-4ac}$ nær 0)

Skriver om: $x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}$

$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})} = \frac{4ac}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}$

$= \frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}$ (her er det ikke kansellering lenger.) legger sammen to neg. tall.

b) $b < 0 \Rightarrow$ kansellering i x_1

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \cdots = \frac{2c}{-b+\sqrt{b^2-4ac}}$ (ikke kansellering lenger, to pos. tall)

Midtveis eks.
oppg. 4

56.27_8 (et siffer i 8-tallssystemet svarer til tre binære siffer)

5: $4+1 = 101$, 2^2+2^0

6: $4+2 = 110$, 2^2+2^1

2: 010

7: 111, $4+2+1 = 2^2+2^1+2^0$

$$\Rightarrow 56.27_8 = \underbrace{101}_{5}\ \underbrace{110}_{6}\,.\,\underbrace{010}_{2}\ \underbrace{111}_{7}{}_2 \qquad \Rightarrow \text{alt. C er riktig.}$$

Oppg 5:

a. $\frac{65}{81}$ i 6-tallssystemet

primfaktorer er 3, siden $3^4 = 81$, og siden 3 deler 6

så vil $\frac{65}{81}$ kunne rep. med endelig antall siffer.

Oppg. 6 $\frac{\sqrt{32}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{(\sqrt{32}-1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{(4\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}^2-1^2}$

$= \frac{4\sqrt{2}\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - \sqrt{2} + 1}{1}$

$= 8 - 5\sqrt{2} + 1 = 9 - 5\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ D er riktig alternativ.

Oppg. 7: $\{x \in \mathbb{R} \mid x^6 - 2 < 0\} = \underline{(-2^{\frac{1}{6}}, 2^{\frac{1}{6}})}$

$\Downarrow$

$x^6 < 2 \Leftrightarrow \boxed{-2^{\frac{1}{6}} < x < 2^{\frac{1}{6}}}$

$\Updownarrow$ $|x|^6 < 2$ ↑ tar sjetteroten.

$\Updownarrow$

$0 < |x| < 2^{\frac{1}{6}}$

$2^{\frac{1}{6}}$ er ikke i mengden selv, men er en minste øvre skranke, siden alle $0 < x < 2^{\frac{1}{6}}$ er i mengden

$\Rightarrow$ alternativ C er riktig

(b er en minste øvre skranke for intervallet (a, b)).

Oppg 17.

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 2^n \qquad n \geq 0 \qquad x_0 = 1 \qquad x_1 = -\frac{2}{3}$$

kar. likning: $r^2 - 6r + 9 = 0 \qquad r = 3$
$ = (r-3)^2$

dobbelrot $\Rightarrow$ generell løsning $= x_n^h = C3^n + Dn3^n$

Vi trenger ikke gå opp en grad siden grunntallet 2 ikke er en rot i den karakteristiske likningen.

Vi prøver derfor $x_n^p = A2^n$

$$x_{n+2}^p - 6x_{n+1}^p + 9x_n^p = A2^{n+2} - 6A2^{n+1} + 9A2^n$$
$$= 4A2^n - 6A\cdot 2\cdot 2^n + 9A2^n$$
$$= (4A - 12A + 9A)2^n = A2^n = 2^n$$

Vi ser at $A = 1$, slik at $x_n^p = 2^n$

generell løsning: $x_n = x_n^p + x_n^h = 2^n + C3^n + Dn3^n$

Svaret må være B eller D, siden disse er de eneste med 2^n

Vi kan også utelukke B, siden leddet $-8n/3$ ikke er med i x_n

$\Rightarrow$ D riktig.

Hvis vi bruker init. bet.: $x_0 = 1 \qquad 1 + C = 1 \Rightarrow C = 0$

$x_1 = -\frac{2}{3} \qquad 2 + 3C + 3D = -\frac{2}{3}$

$\Rightarrow 2 + 3D = -\frac{2}{3} \Rightarrow 3D = -\frac{2}{3} - 2 = -\frac{8}{3}$

$\Rightarrow D = -\frac{8}{9}$

$\Rightarrow x_n = 2^n - \frac{8}{9}n3^n \qquad 9 = 3^2$

$= 2^n - 8n3^{n-2} \Rightarrow$ <u>alt. D er riktig</u>

Oppg. 19 $\quad 5x_{n+2} - 16x_{n+1} + 3x_n = 0 \qquad 16^2 = (2^4)^2 = 2^8$

$$5r^2 - 16r + 3 = 0 \qquad r = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 5 \cdot 3}}{10} = \frac{16 \pm \sqrt{196}}{10} = \frac{16 \pm 14}{10}$$

$$\Rightarrow r_1 = 3, \quad r_2 = \frac{1}{5}$$

gen. løsning: $x_n = C3^n + D\left(\frac{1}{5}\right)^n$

v.i.M: eksakt løsning skal forbli begrenset. Da må $C = 0$

Da er $x_n = D\left(\frac{1}{5}\right)^n$.

$x_0 = D$, $x_1 = \frac{1}{5}D$, slik at $x_1 = \frac{1}{5}x_0$

ser at det er bare alternativ D som oppfyller dette.

(den simulerte løsningen gir overflow uansett, siden avrundingsfeil i koeffisientene ($5x_{n+2} - 16x_{n+1} + 3x_n = 0 \Rightarrow x_{n+2} = \underbrace{\frac{16}{5}}_{\text{avr. feil}} x_{n+1} - \frac{3}{5}x_n$

gir en løsning $x_n = \underset{\downarrow \atop 0}{\hat{\varepsilon}}\, 3^n + (D - \hat{\varepsilon})\left(\frac{1}{5}\right)^n$

Oppg. 13

$$f(x) = e^x = T_n(x) + R_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}}_{\frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}}$$

siden c ligger mellom 0 og x, og $x \in [-1, 0]$, så er $c < 0$

$\Rightarrow e^c < 1$

videre er $|x|^{n+1} < 1^{n+1} = 1$, siden $x \in [-1, 0]$

Derfor: $\left| \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = \frac{e^c}{(n+1)!} |x|^{n+1} < \frac{1}{(n+1)!} 1 = \frac{1}{(n+1)!} < 0.001$

$\frac{1}{1000}$

Vi må ha: $(n+1)! > 1000$

$n=3$: $(n+1)! = 4! = 24$

$n=4$: $5! = 120$

$n=5$: $6! = 720$

$n=6$: $7! = 5040$ $\Rightarrow$ D er riktig