9.1.3

f skal tilnærmes med et kvadratisk polynom nær a

(a) La oss skrive $p(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \Rightarrow p'(x) = b_1 + 2b_2 x$, $p''(x) = 2b_2$

Vi skal bestemme b_0, b_1, b_2, ut fra at

$p(a) = f(a) \iff b_0 + b_1 a + b_2 a^2 = f(a)$

$p'(a) = f'(a) \iff b_1 + 2b_2 a = f'(a)$

$p''(a) = f''(a)$ $\quad 2b_2 = f''(a). \Rightarrow b_2 = \frac{f''(a)}{2}$

$b_1 = f'(a) - 2b_2 a = f'(a) - f''(a)\,a$

$b_0 = -b_1 a - b_2 a^2 + f(a)$

$= \underline{-(f'(a) - f''(a))a - \frac{f''(a)}{2}a^2 + f(a)}$

(b) Vi skriver i stedet $p(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2$ $\quad p(a) = b_0$

Da er $p'(x) = b_1 + 2b_2(x-a)$, $\quad p''(x) = 2b_2$

$p'(a) = b_1$ $\quad p''(a) = 2b_2$

$p(a) = f(a) \iff b_0 = f(a)$

$p'(a) = f'(a) \iff b_1 = f'(a)$

$p''(a) = f''(a) \iff 2b_2 = f''(a) \Rightarrow b_2 = \frac{f''(a)}{2}$

$\Rightarrow p(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$

(= Taylorpolynom av grad 2)

9.1.6 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$

Vi setter inn ix for x i rekka for e^x:

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \cdots$$

$$= \underline{1} + ix - \underline{\frac{x^2}{2!}} - i\frac{x^3}{3!} + \underline{\frac{x^4}{4!}} + i\frac{x^5}{5!}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$\underline{ix - i\frac{x^3}{3!} + i\frac{x^5}{5!}}$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right)}_{\text{rekka for } \cos x} + i\underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)}_{\text{rekka for } \sin x}$$

$= \cos x + i \sin x$ (Denne kalles for Eulers formel)

9.2.2 $\quad f(x) = x^2$. Vi interpolerer f med et polynom av grad 3 i punktene 0, 1, 2, 3. Kall for p_3

Det finnes et unikt polynom av grad ≤ 3 som går gjennom
$(0, f(0))$, $(1, f(1))$, $(2, f(2))$, $(3, f(3))$.

Siden $f(x)$ spesielt er et 3. grads polynom som går gjennom disse punktene, så må $p_3(x) = f(x) \Rightarrow p_3(x) = x^2$
$\Rightarrow p_3(4) = 4^2 = 16$

i Kap. 9: et slikt polynom skal ha koeffisientene foran $x^{n+1}, x^{n+2}, \ldots$ lik 0.

det første alternativet rett.

9.2.3

x	0	1	3	4
$f(x)$	1	0	2	1

a) Vi skal skrive det interpolerende polynomet på formen (kalles for Lagrange-formen til interpol. pol.)

$$p_3(x) = c_0(x-1)(x-3)(x-4) + c_1 x(x-3)(x-4) + c_2 x(x-1)(x-4) + c_3 x(x-1)(x-3)$$

Vi bestemmer c_0, c_1, c_2, c_3:

$f(0) = p_3(0) = 1 = c_0(-1)(-3)(-4) = -12c_0 \Rightarrow c_0 = -\frac{1}{12}$

$f(1) = p_3(1) = 0 = c_1 \cdot 1(1-3)(1-4) = 6c_1 \Rightarrow c_1 = 0$

$f(3) = p_3(3) = 2 = c_2 \cdot 3(3-1)(3-4) = -6c_2 \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{3}$

$f(4) = p_3(4) = 1 = c_3 \cdot 4 \cdot (4-1)(4-3) = 12c_3 \Rightarrow c_3 = \frac{1}{12}$

$$\Rightarrow p_3(x) = -\frac{1}{12}(x-1)(x-3)(x-4) - \frac{1}{3}x(x-1)(x-4) + \frac{1}{12}x(x-1)(x-3)$$

b) Newton form:

x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$		
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$

$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

$\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = \frac{1-(-1)}{3}$

$\frac{2-0}{3-1}$

$\frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0} = \frac{-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}}{4} = -\frac{1}{3}$

0	1			
1	0	-1		
3	2	1	$\frac{2}{3}$	
4	1	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$

Newtonform:

$$f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)$$

$$= 1 - x + \frac{2}{3}x(x-1) - \frac{1}{3}x(x-1)(x-3)$$

c): Sett inn $x = 0, 1, 2, 3$; uttrykk fra a, og b, og se at vi får samme verdier.

11.2.9 i Kalkulus

Vi skal finne $\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt$ med nøyaktighet 10^{-3}.

Det er mye regning å finne Taylorrekka til $\frac{1-e^{-t}}{t}$ ved å derivere, derfor, vi tar utgangspunkt i $f(x)=e^x$.

Vi vet: $e^x = T_n(x) + R_n(x) = \underbrace{1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}}_{T_n(x)} + \frac{\overset{f^{(n+1)}(c)}{e^{c}}}{(n+1)!}x^{n+1}$

Vi setter inn $x=-t$

$$\frac{1-e^{-t}}{t} = \frac{\cancel{1}-\left(\cancel{1}+(-t)+\frac{(-t)^2}{2!}+\dots+\frac{(-t)^n}{n!}+\frac{e^{c(t)}}{(n+1)!}(-t)^{n+1}\right)}{t}$$

$$= \frac{t-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}-\dots+(-1)^{n+1}\frac{t^n}{n!}+\boxed{(-1)^{n+2}\frac{e^{c(t)}}{(n+1)!}t^{n+1}}}{t}$$

$$= 1-\frac{t}{2!}+\dots+(-1)^{n+1}\frac{t^{n-1}}{n!}+(-1)^{n+2}\frac{e^{c(t)}}{(n+1)!}t^n$$

Vi integrerer:

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt = \int_0^1 \Big(\underbrace{1+\dots+(-1)^{n+1}\frac{t^{n-1}}{n!}}_{\text{tilnærming}}\Big)dt + \underbrace{\int_0^1 (-1)^{n+2}\frac{e^{c(t)}}{(n+1)!}t^n\,dt}_{\text{skyldes restledd, vil ha mindre enn } 10^{-3}}$$

$|\int f(t)dt| \le \int |f(t)|\,dt$

$$\left|\int_0^1 (-1)^{n+2}\frac{e^{c(t)}}{(n+1)!}t^n\,dt\right| \le \int_0^1 \frac{e^{c(t)}}{(n+1)!}t^n\,dt \le \int_0^1 \frac{1}{(n+1)!}t^n\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)(n+1)!}\right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)(n+1)!}$$

$\boxed{c(t) \text{ ligger mellom } 0 \text{ og } -t\text{, så } c(t)\le 0 \Rightarrow e^{c(t)} \le 1}$

Vi må derfor velge n slik at $\frac{1}{(n+1)(n+1)!} < 10^{-3}$

$$\Rightarrow (n+1)(n+1)! > 1000.$$

Vi prøver oss frem, og finner at $n=5$ er minste slike n.

Tilnærmingen blir dermed: $\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt \approx \int_0^1 \left(1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{6}-\frac{t^3}{24}+\frac{t^4}{120}\right)dt$

$$= \dots = \frac{5737}{7200} \approx \underline{\underline{0.7968}}$$

9.2.4 i kompendiet:

a) Anta p_1, p_2 er kvadratiske polynomer som interpolerer f i x_0, x_1, x_2

Vi regnet ut $p = p_1 - p_2$ i x_0, x_1, x_2

$$p(x_0) = p_1(x_0) - p_2(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0$$
$$p(x_1) = p_1(x_1) - p_2(x_1) = f(x_1) - f(x_1) = 0$$
$$p(x_2) = p_1(x_2) - p_2(x_2) = f(x_2) - f(x_2) = 0$$
$$\Rightarrow p(x_0) = p(x_1) = p(x_2) = 0$$

b) Vi skriver $p(x) = ax^2 + bx + c$.

Siden $p(x_0) = p(x_1) = p(x_2) = 0$ så har vi at

I $\quad ax_0^2 + bx_0 + c = 0$

II $\quad ax_1^2 + bx_1 + c = 0$

III $\quad ax_2^2 + bx_2 + c = 0$

$(x_0^2 - x_1^2) = \underline{(x_0 - x_1)}(x_0 + x_1)$

likning I − II: $\quad a(x_0^2 - x_1^2) + b(x_0 - x_1) = 0 \Rightarrow a\underline{(x_0-x_1)}(x_0+x_1) + b\underline{(x_0-x_1)} = 0$

I − III: $\quad a(x_0^2 - x_2^2) + b(x_0 - x_2) = 0 \Rightarrow a(x_0-x_2)(x_0+x_2) + b(x_0-x_2) = 0$

$$\Rightarrow a(x_0 + x_1) + b = 0$$
$$a(x_0 + x_2) + b = 0$$

trekk disse to fra hverandre:

$$a(\underline{x_0} + x_1) - a(\underline{x_0} + x_2) = 0$$
$$\Rightarrow a(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow \underline{a = 0}$$

siden $a = 0$ må da også $b = 0$

Siden $a = b = 0$, må også $c = 0$

Siden $a = b = c = 0$, så er $p(x) = ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow p = p_1 - p_2 = 0$

$\Rightarrow p_1 = p_2 \Rightarrow$ unikt int. pol.

c): Dette kan også vises på samme måte for høyere n, eller ved å referere til algebraens fundamentalteorem (en n'te grads polynom med $n+1$ røtter er 0)

9.3.3

x	0	1	2
$f(x)$	2	1	0

a)

$$\begin{array}{cccc}
x_0 & f(x_0) & & \\
x_1 & f(x_1) & f[x_0,x_1] & \\
x_2 & f(x_2) & f[x_1,x_2] & f[x_0,x_1,x_2]
\end{array}$$

$$f[x_0,x_1] \to \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{1-2}{1-0} = -1$$

$$f[x_1,x_2] \to \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{0-1}{2-1} = -1$$

$$f[x_0,x_1,x_2] \to \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = \frac{-1-(-1)}{2-0} = 0$$

$$\begin{array}{cccc}
0 & 2 & & \\
1 & 1 & -1 & \\
2 & 0 & -1 & 0
\end{array}$$

Newtonform: $f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$

$$= 2 - 1(x-0) + 0(x-0)(x-1)$$

$$= 2 - x$$

$\Rightarrow$ det interpolerende polynomet er $p(x) = 2 - x$, som er lik funksjonen selv.