Vi velger oppgaver fra sek 9.2 – 10.4 i komp.

9.3.2

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	1	4	9

samplet fra $f(x) = x^2$

a) Regn ut $f[0,1,2,3]$

$$\begin{array}{lllll}
x_0 & f(x_0) & & & \\
x_1 & f(x_1) & f[x_0,x_1] & & \\
x_2 & f(x_2) & f[x_1,x_2] & f[x_0,x_1,x_2] & \\
x_3 & f(x_3) & f[x_2,x_3] & f[x_1,x_2,x_3] & f[x_0,x_1,x_2,x_3]
\end{array}$$

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

$$\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = \frac{3-1}{2-0} = \frac{2}{2}$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0} = 0$$

$$\begin{array}{lllll}
0 & 0 & & & \\
1 & 1 & 1 & & \\
2 & 4 & 3 & 1 & \\
3 & 9 & 5 & 1 & 0
\end{array}$$

$\Rightarrow f[0,1,2,3] = 0$

b) $f[x_0,\dots,x_n] = 0$ når f er et polynom av grad $\leq n-1$:

Vi vet at (teo 9.22) $f[x_0,\dots,x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$ for en ξ i $[a,b]$,

men $f^{(n)}(x) = 0$ for alle polynomer av grad $\leq n-1$

$\Rightarrow f[x_0,\dots,x_n] = 0$.

10.2.3

$f(x) = x - \cos x$ (har nullpkt. i $x \approx 0.739085 \cdots$)

a) $[a, b] = [0, 1]$

relativ feil med halveringsmetoden etter i iterasjoner:

$$\approx \frac{b-a}{|m_i|\, 2^{i+1}}$$

relativ feil etter 10 steg $\approx \frac{1}{|m_i|\, 2^{11}} \approx 2^{-11} \approx 10^{-4}$.

(b) 10 korrekte siffer: $\frac{b-a}{|m_i|\, 2^{i+1}} \leq 10^{-10} \iff \frac{1}{|m_i|\, 2^{i+1}} \leq 10^{-10}$

$$\iff 2^{i+1} \geq \frac{10^{10}}{|m_i|} \geq 10^{10}$$

$|m_i| \leq 1 \iff \frac{1}{|m_i|} \geq 1$

$$\iff (i+1) \geq \log_2 10^{10} = 10 \log_2 10$$

(tok $\log_2$ på begge sider)

$$i \geq 10 \log_2 10 - 1 \approx 32.2193$$

vi må velge $\underline{i \geq 33}$

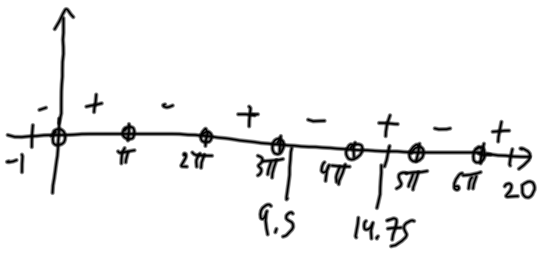
(d) 54 iterasjoner: feil $\approx \frac{1}{2^{55}} = 2^{-55}$ (ei er da rundt antall binære siffer som brukes i signifikanden)

10.2.5 $\qquad (7\pi > 20)$

$f(x) = \sin x$ på $[-1, 20]$

nullpunkter: $x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi$

Dette er alle nullpunktene til f på $[-1, 20]$



halveringsmetoden:

$$m_1 = \frac{-1+20}{2} = 9.5$$

Vi har at $f(9.5) < 0$

Siden $f(20) > 0$, så vil første iterasjon i halveringsmetoden gi $[9.5, 20]$

innenfor $[9.5, 20]$ er det tre nullpunkter: $4\pi, 5\pi, 6\pi$

neste iterasjon: $m_2 = \dfrac{9.5+20}{2} = 14.75$. $\quad f(m_2) > 0 \quad f(9.5) < 0$

andre iterasjon av halveringsmetoden vil velge $[9.5, 14.75]$

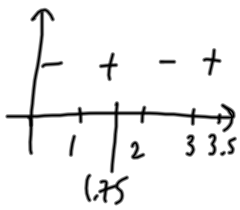
i $[9.5, 14.75]$ ligger bare nullpunktet 4π, som vil være det nullpunktet halveringsmetoden finner.

10.2.2

a) $f(x) = (x-3)(x^2-3x+2) \qquad [a,b] = [0, 3.5]$

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow x = 2$ eller $x = 1$

nullpunktene er $1, 2, 3$.



første iterasjon $m_0 = \frac{0 + 3.5}{2} = 1.75$

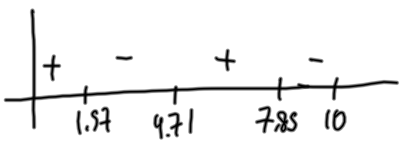
Vi ser at $f(1.75) > 0$.

Siden $f(0) < 0$, så vil første iterasjon av halveringsmetoden velge $[0, 1.75]$

her er $x = 1$ eneste nullpkt, slik at halveringsmetoden vil finne nullpunktet $x = 1$.

b) $f(x) = \cos x$ på $[0, 10]$

nullpunkter: $x = \frac{\pi}{2} \approx 1.57$, $x = \frac{3\pi}{2} \approx 4.7124$, $x = \frac{5\pi}{2} \approx 7.8540$



$\cos(0) > 0$

$\cos(10) < 0$

$\cos(5) > 0 \Rightarrow$ første iterasjon gir $[5, 10]$

$\Rightarrow x = \frac{5\pi}{2} \approx 7.8540$ er eneste nullpkt i $[5, 10]$, som derfor blir valgt av halveringsmetoden.

10.3.2

$f(x) = x^3 - 2 \qquad x_0 = -2 \;, x_1 = 2$

sekantmetoden: $\quad x_i = x_{i-1} - \dfrac{x_{i-1} - x_{i-2}}{f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})} f(x_{i-1})$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1) = 2 - \frac{2-(-2)}{x_1^3 - 2 - (x_0^3 - 2)} (x_1^3 - 2)$$

$$= 2 - \frac{4}{8-2-(-8-2)} (8-2)$$

$$= 2 - \frac{4}{16} 6 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ det siste alternativet er riktig (for vi kjører kun en iterasjon).

10.3.3

a) $c = \sqrt{3}$ nullpkt for $f(x) = x^2 - 3$

b) $c = 2^{\frac{1}{12}}$ nullpkt for $f(x) = x^{12} - 2$

c) $c = e$ nullpkt for $f(x) = \ln x - 1$

10.4.7

a) $f(x) = \frac{1}{x} - R \qquad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\frac{1}{x_n} - R}{-\frac{1}{x_n^2}} = x_n + x_n^2\left(\frac{1}{x_n} - R\right)$$

$$= x_n + x_n - Rx_n^2 = x_n(2 - Rx_n)$$

poeng: dette uttrykket bruker ikke divisjon.
Vi kan derfor tilnærme $\frac{1}{R}$ (som er nullpunktet til $f(x) = \frac{1}{x} - R$)
ved å kjøre Newtons metode, og uten å bruke divisjon.

b) Vi setter $f(x) = \frac{1}{x} - 7 \qquad (R = 7)$, og skal tilnærme $\frac{1}{7}$
med 10 siffers nøyaktighet.