Oppg. 10.2.10 i Kalkulus.

Svømmebasseng med 1 000 000 liter vann med 0,004 % klor.
Tapper 50 000 liter pr. dag.
Fyller opp med 50 000 liter pr. dag med 0,001 % klor. Antar perfekt blanding.
La $y(t)$ være antall liter klor ved tid t (målt i dager). $t=0$ når vi beg.

Vis at $y' + \frac{1}{20} y = \frac{1}{2}$.

Hvor lang tid før 0,003 % klor?

Liter klor ved $t=0$: $y(0) = 1 \cdot 10^6 \cdot 0{,}004\,\%$
$= 1 \cdot 10^6 \cdot \frac{4}{10^5}$
$= 40$

Endring i klorinnhold.

i) Påfylling: $50000 \cdot 0.001\,\% = 5 \cdot 10^4 \cdot 1 \cdot 10^{-5}$
$= 0{,}5$

ii) Tapper 50 000 liter vann i døgnet. Endring i klorinnhold:

Tapper $\frac{50\,000}{1\,000\,000} = \frac{1}{20}$ deler av vannet

Tapping av klor: $\frac{1}{20} y(t)$

Total endring: $0.5 - \frac{1}{20} y(t) = y'(t)$

Løse $y' + \frac{1}{20} y = \frac{1}{2}$.

Homogen lign. $y' + \frac{1}{20} y = 0$, løsning

$y_h(t) = Ce^{-t/20}$

Partikulær løsning:

Siden H.S. $= \frac{1}{2}$ prøver vi med

$y_p(t) = A$, $y_p'(t) = 0$

Setter inn: $0 + \frac{1}{20} A = \frac{1}{2}$, $A = 10$

Generell løsning:

$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = Ce^{-t/20} + 10$

$y(0) = 40$, $C \cdot 1 + 10 = 40$, $C = 30$

Løsning: $y(t) = 30 e^{-t/20} + 10$.

Når blir klorinnholdet 0,003 %?
Dette svarer til 30 liter klor.

Skal ha $y(t) = 30e^{-t/20} + 10 = 30$

$30e^{-t/20} = 20$

$e^{-t/20} = 2/3$

Ta ln på begge sider

$-t/20 = \ln(2/3) = \ln 2 - \ln 3$

$t = (\ln 3 - \ln 2) \cdot 20 \approx 8,10$ ~~dager~~

Klorinnholdet blir 0,003 %
etter 8,10 dager.

$y' + \frac{1}{20} y = \frac{1}{2}$ er separabel !

$y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{20} y$,

$$\frac{y'}{\frac{1}{2} - \frac{1}{20} y} = 1$$

$$\frac{20 y'}{10 - y} = 1$$

$$x' = t/x = t \cdot x^{-1}$$

$$x'' = x^{-1} - t \cdot x^{-2} \cdot x' = x^{-1} - t^2 \cdot x^{-3}$$

$$x''' = -x^{-2} \cdot x' - 2t \cdot x^{-3} - t^2(-3)x^{-4} \cdot x'$$

Kompendiet 13.7.2.

$x' = x \,, \quad x(0) = 1.$

Løse med Euler, Euler midtpkt,
kvad. Taylor ...

Vi velger $h = 1$ og tar ett steg.

i) Euler $x_{i+1} = x_i + h\, f(t_i, x_i)$, $\quad x' = f(t, x)$

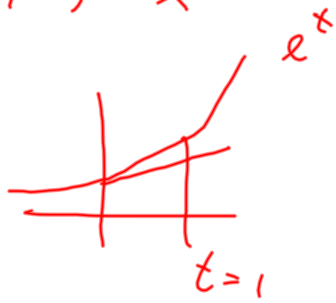
$i = 0 \quad x_1 = x_0 + h\, f(t_0, x_0)$

I vårt tilfelle er $t_0 = 0$, $\quad x_0 = x(t_0) = 1$

$f(t, x) = x$

$x_1 = x_0 + h \cdot x_0 = (1+h)\, x_0$

$= (1+1) \cdot 1 = 2.$



ii) Euler midtpkt.

$$x_{i+1/2} = x_i + \frac{h}{2} f(t_i, x_i)$$

$$x_{i+1} = x_i + h f(t_{i+1/2}, x_{i+1/2})$$

$i=0$:

$$x_{1/2} = x_0 + \frac{h}{2} f(t_0, x_0) = x_0 + \frac{h}{2} x_0 = 1.5$$

$$x_1 = x_0 + h f(t_{1/2}, x_{1/2}) = x_0 + h\, x_{1/2}$$

$$= 1 + 1 \cdot 1.5 = 2.5$$

iii) Kvadratisk Taylor.

$$x(t+h) \approx x(t) + h\,x'(t) + \frac{h^2}{2} x''(t)$$

$$x(h) \approx x(0) + h\,x'(0) + \frac{h^2}{2} x''(0)$$

Vi har $x'(t) = x(t)$, $x''(t) = x'(t) = x(t)$

$x(0) = 1$, $x'(0) = x(0) = 1$, $x''(0) = x'(0) = 1$.

$$x(h) \approx 1 + 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 2.5$$

Kompendiet 13.4.2.

Anta at $x' = \sin x$, $x(0) = 1$.

Finn en øvre grense for feilen når vi tar ett steg med Euler. (vilkårlig h)

Euler er basert på 1. grads Taylor.

$$x(h) \approx x(0) + h\, x'(0) = x(0) + h\, f(0, x(0))$$
$$= x(0) + h \sin(x(0))$$
$$= 1 + h \cdot \sin 1.$$

Feil er gitt ved rest leddet i Taylor:

$$R_1 x(t) = \frac{h^2}{2} x''(\xi), \quad \xi \in (0, h)$$

Vi har $x'(t) = \sin(x(t))$

så $x''(t) = \cos(x(t)) \cdot x'(t) = \cos x(t) \sin x(t)$
$$= \frac{1}{2} \sin(2x(t))$$

Vi vet at $|x''(t)| \leq \frac{1}{2} |\sin(2x(t))| \leq \frac{1}{2}$.

Derfor $|R_1 x(t)| = \left|\frac{h^2}{2} x''(\xi)\right| \leq \frac{h^2}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{h^2}{4}$