Oppg. 11.2.3 i Kalkulus.

Finn Taylorpol til $f(x) = \ln x$ av grad 3 om $a = 1$. Vis at $|R_3 f(b)| \leq \frac{|b-1|^4}{4}$

Taylorpolynom av grad 3

$$T_3 f(x) = f(1) + (x-1) f'(1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 f''(1) + \frac{1}{6}(x-1)^3 f'''(1)$$

Deriverte:

$f(x) = \ln x$, $f(1) = \ln 1 = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $f'(1) = 1$

$f''(x) = -x^{-2}$, $f''(1) = -1$

$f'''(x) = 2x^{-3}$, $f'''(1) = 2$

$$T_3 f(x) = 0 + (x-1)\cdot 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 \, 2$$

$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$$

Feilestimat:

$$R_3 f(b) = \frac{1}{4!}(b-1)^4 f''''(\xi), \quad \xi \in (1,b), \; b>0$$

$$f'''(x) = 2x^{-3}$$

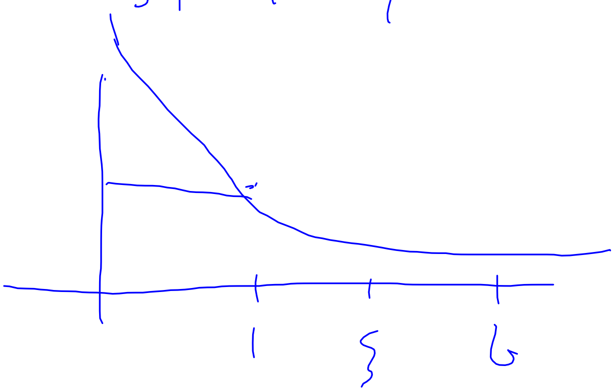
$$f''''(x) = -6x^{-4}.$$

Dermed er $R_3 f(b) = \frac{1}{4!}(b-1)^4(-6)\frac{1}{\xi^4}$

$$= -\frac{1}{4}(b-1)^4 \cdot \frac{1}{\xi^4}$$

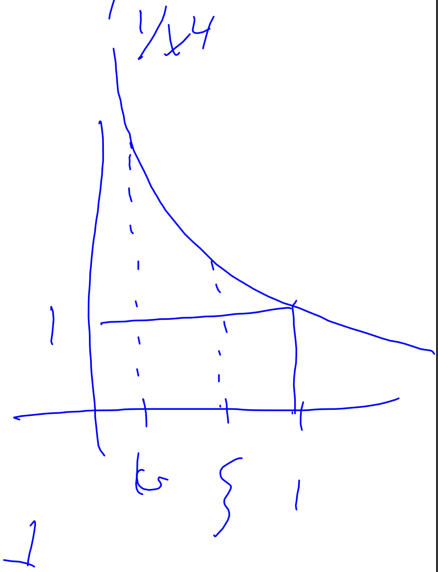
$$|R_3 f(b)| = \frac{1}{4}|b-1|^4 \cdot \frac{1}{\xi^4} \le \frac{1}{4}|b-1|^4 \cdot 1$$

$$= \frac{(b-1)^4}{4}$$



Hva om $b \in (0,1)$.

$$|R_3 f(b)| = \frac{1}{4}|b-1|^4 \cdot \frac{1}{\xi^4}$$



Øvre grense for $\frac{1}{\xi^4}$ er $\frac{1}{b^4}$.

Dermed er $|R_3 f(b)| \le \frac{1}{4}|b-1|^4 \cdot \frac{1}{b^4}$ når $b<1$.

nov 26-08:30

Oppg. 4.3.10 i Komp.

Følgende sekvens av bytes representerer en UTF-8 kodet tekst, men med feil. Finn disse og forklar feilene.

41 C3 98 41 C3 41 41 C3 98 98 41

UTF-8 koding: Hvis Unicode koden er c:

1. Hvis $c = (d_6 d_5 d_4 d_3 d_2 d_1 d_0) \in [0, 127]$
   så kodes c som $\qquad 00_{16} - 7F_{16}$
   $0 d_6 d_5 d_4 d_3 d_2 d_1 d_0$

2. Hvis $c = (d_{10} d_9, - - , d_1 d_0) \in (128, 2047)$
   $80_{16} - 7FF_{16}$
   $110 d_{10} d_9 d_8 d_7 d_6$
   $10 d_5 d_4 d_3 d_2 d_1 d_0$

Feil i byte 6:
nr. 5: $C3_{16} = (1100\ 0011)_2$ - tilfelle 2
nr. 6 skal være på formen $10 d_5 d_4 d_3 d_2 d_1 d_0$
det vil si 41 er umulig (første siffer må være minst 8).

Examen 5/12 - 2011.

Oppg. 1. Vis at $3x_{n+2} - 7x_{n+1} + 2x_n = n$ $\quad x_0 = 1,\ x_1 = 0$

har løsningen $x_n = \frac{1}{4}(1 + 3^{-n+1} - 2n)$

Homogen lign $3x_{n+2} - 7x_{n+1} + 2x_n = 0$

Kar. lign $3r^2 - 7r + 2 = 0$, $r_1 = 1/3$, $r_2 = 2$

Homogen løsn. $x_n^h = C_1 \cdot 3^{-n} + C_2 \cdot 2^n$

Partikulær løsning av $3x_{n+2} - 7x_{n+1} + 2x_n = n$

Prøver med $x_n^p = An + B$

$$3x_{n+2}^p - 7x_{n+1}^p + 2x_n^p = 3(A(n+2)+B) - 7(A(n+1)+B) + 2(An+B)$$

$$= 3An + 6A + 3B - 7An - 7A - 7B + 2An + 2B$$

$= -2An - A - 2B = n$ for alle n.

Må ha $-2A = 1$, $-A - 2B = 0$

$A = -1/2$, $2B = -A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{4}$

$x_n^p = An + B = -\frac{1}{2}n + \frac{1}{4}$

Generell løsn. $x_n = x_n^h + x_n^p$

$$= C_1 \cdot 3^{-n} + C_2 2^n - \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}$$

To startverdier $x_0 = 1$ og $x_1 = 0$

gir $C_1 = 3/4$, $C_2 = 0$

Endelig løsning $x_n = \frac{3}{4}3^{-n} - \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}$

b) Hva skjer når vi simulerer?

$3x_{n+2} - 7x_{n+1} + 2x_n = n$, $x_0 = 1$, $x_1 = 0$

Formelen som programmeres er

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}(n + 7x_{n+1} - 2x_n)$$

Vi ser at $x_2 = \frac{1}{3}(0 + 7x_1 - 2x_0)$

$$= \frac{1}{3}(0 - 2) = -\frac{2}{3}$$

Så selv om x_0 og x_1 kan representeres eksakt, kan ikke x_2 representeres eksakt

Dette svarer til at $C_1 = 3/4 + \varepsilon_1$ og $C_2 = \varepsilon_2$

Simulerte verdier svarer til en løsning

$$\bar{x}_n = (3/4 + \varepsilon_1)3^{-n} + \varepsilon_2 \cdot 2^n - \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}$$

der $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2| \approx 10^{-17}$.

nov 26-09:22

Oppg. 2. La $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ betegne Fibonaccifølgen

$$x_{n+2} = x_n + x_{n+1}, \quad n \geq 1, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1.$$

Sett $y_n = x_{4n}$. Vis at y_n inneholder 3 som faktor for alle $n \geq 1$.

i) $y_1 = x_4 = x_2 + x_3 = x_2 + x_1 + x_2 = 2x_2 + x_1$
$= 2 \cdot 1 + 1 = 3$

Så tre er faktor.

ii) Anta at y_k har 3 som faktor,
må vise at y_{k+1} også har 3 som faktor

$$y_{k+1} = x_{4(k+1)} = x_{4k+4} = x_{4k+3} + x_{4k+2}$$

$$= x_{4k+2} + x_{4k+1} + x_{4k+2} = 2x_{4k+2} + x_{4k+1}$$

$$= 2(x_{4k} + x_{4k+1}) + x_{4k+1}$$

$$= 2x_{4k} + 3x_{4k+1}$$

$$= 2y_k + 3x_{4k+1}$$

Vi ser at y_{k+1} har 3 som faktor siden y_k har det.

Altså OK.