Induksjonsbevis

Vi har ofte behov for å summere de n første naturlige tallene

$1, 2, 3, \ldots, n$, $\sum_{i=1}^{n} i$

Noen har foreslått formelen

$$P_n \quad \boxed{\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots}$$

Er dette riktig??

Vi sjekker noen tilfeller

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1) = S_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Sjekk

$n=1$ $\quad \sum_{i=1}^{1} i = 1, \quad S_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$ ✓

$n=2$ $\quad \sum_{i=1}^{2} i = \underbrace{\sum_{i=1}^{1} i}_{=1} + 2 = 3, \quad S_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3$ ✓

$n=3$ $\quad \sum_{i=1}^{3} i = \sum_{i=1}^{2} i + 3 = 6, \quad S_3 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$ ✓

$n=4$ $\quad \sum_{i=1}^{4} i = \sum_{i=1}^{3} i + 4 = 10, \quad S_4 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10$ ✓

Anta at vi fortsetter å sjekke

$n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots,$ og finner at

det stemmer helt opp til $n = k$

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{1}{2} k(k+1)$$

Vil det da stemme for $n = k+1$?

Altså $\sum_{i=1}^{k+1} i = S_{k+1} = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$

Vi prøver!

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^{k} i + (k+1) \quad \Bigg| \quad \text{Summen } \sum_{i=1}^{k} i \text{ er sjekket}$$

$$= \frac{1}{2} k (k+1) + (k+1)$$

$$= (k+1) \left(\frac{1}{2} k + 1 \right) = (k+1) \left(\frac{1}{2} k + \frac{2}{2} \right)$$

$$= (k+1) \frac{1}{2} (k+2) = S_{k+1}$$

stemmer!

Konklusjon: Om formelen stemmer for $n=k$ må den også stemme for $n=k+1$.

Vi vet at det stemmer for $k=4$. Da stemmer det for $k+1=5$

Men da kan vi gjenta med $k=5$

Stemmer for $k=5$, må da også stemme for $n=k+1=6$

Generelt induksjonsprinsipp

Anta at vi har påstander

P_n, $n = 1, 2, 3, \dots$

For å vise at P_n er sann for alle n kan vi gjøre følgende:

1. Sjekk at P_1 er sann.
2. Anta at P_k er sann og bruk dette til å vise at P_{k+1} er sann.

Hvis begge punktene går bra er P_n sann for alle $n \in \mathbb{N}$.

Eksempel: Vis at $n(n^2+5)$ er delelig med 6 for $n = 1, 2, 3, \ldots$

Sjekker for $n=1$. Da er $n(n^2+5) = 1 \cdot 6$ som er delelig med 6.

For moro skyld også for $n=2$.

$$n(n^2+5) = 2(2^2+5) = 2(4+5) = 18$$

som er delelig med 6.

$n=3$: $3(3^2+5) = 3(9+5) = 3 \cdot 14 = 42$

Anta at påstanden holder for $n=k$,

$k(k^2+5)$ er delelig med 6.

Må vise at OK for $n=k+1$,

altså at $(k+1)((k+1)^2+5)$ er delelig med 6.

$$(k+1)((k+1)^2+5) = k((k+1)^2+5) + 1\cdot((k+1)^2+5)$$

$$= k(k^2+2k+1+5) + k^2+2k+1+5$$

$$= k(k^2+5) + k(2k+1) + k^2+2k+6$$

$$= k(k^2+5) + 2k^2+k+k^2+2k+6$$

$$= k(k^2+5) + 3k^2+3k+6$$

$$= k(k^2+5) + 3k(k+1) + 6$$

delelig med 6 fra antagelse

Enten k eller k+1 må være partall. Dermed er både 3 og 2 faktor så produkt delelig med 6.

Opplagt delelig med 6.