Andre ordens differensligninger

Seksjon 4.1 i Kalk.

Ser på ligninger på formen

$$x_{n+2} + b\, x_{n+1} + c\, x_n = 0, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$\{x_n\}$ ukjent følge. $b, c \in \mathbb{R}$

Eks. $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$, $x_0 = 1$, $x_1 = 8$

Kar. ligning

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

Løser $r = 2 \pm \sqrt{4-4} = 2$

Da er generell løsning

$$x_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot n \cdot 2^n$$

Startverdier

$1 = x_0 = C_1 + 0$, $C_1 = 1$

$8 = x_1 = C_1 \cdot 2 + C_2 \cdot 1 \cdot 2 = 2 + 2C_2$

$2C_2 = 6$, $C_2 = 3$.

$$x_n = 2^n + 3n2^n = 2^n(3n+1)$$

Eks. $x_{n+2} + 2x_{n+1} + 2x_n = 0$, $x_0 = 1$, $x_1 = 2$

Kar. pol. $r^2 + 2r + 2 = 0$

$r = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$

Vet at $x_n = C_1(-1+i)^n + C_2(-1-i)^n$ er løsning for alle C_1, C_2.

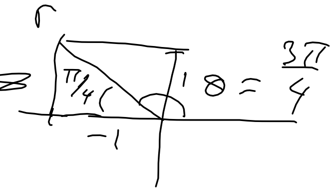
Bedre: $r = \rho e^{i\theta}$

$$x_n = \rho^n (C_1 \cos n\theta + C_2 \sin n\theta), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

r på polar form. $r = -1 + i$, $\bar{r} = -1 - i$

$\rho = |r| = \sqrt{2}$

$\theta = \frac{3\pi}{4}$



Altså er $x_n = (\sqrt{2})^n \left(C_1 \cos n\frac{3\pi}{4} + C_2 \sin n\frac{3\pi}{4}\right)$

$1 = x_0 = C_1 \cdot 1$, $C_1 = 1$

$$2 = x_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + C_2 \sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + C_2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

$$= -1 + C_2, \quad C_2 = 3$$

$$x_n = (\sqrt{2})^n \left(\cos n\frac{3\pi}{4} + 3 \sin n\frac{3\pi}{4}\right)$$

Inhomogene differensligninger

Seksjon 4.2 i Kalk.

Anta 100 000 i banken til 6 % rente, $x_{n+1} = 1{,}06\, x_n$, $x_0 = 100\,000$

Hva om vi tar ut 5000 kr. på år?

Da er $x_{n+1} = 1{,}06\, x_n - 5000$

$$x_{n+1} - 1{,}06\, x_n = -5000$$

Generert $x_{n+2} + b\, x_{n+1} + c\, x_n = f(n)$

Lemma

Anta at x_n^p er en løsning av $x_{n+2} + b\, x_{n+1} + c\, x_n = f(n)$

Da er de andre løsningene gitt ved $x_n = x_n^p + x_n^h$

der x_n^h er den generelle løsningen av den homogene ligningen

$$x_{n+2} + b\, x_{n+1} + c\, x_n = 0$$

Tilbake til eksempelet.

$x_{n+1} = 1.06\, x_n - 5000$

Måler penger i tusener:

$x_{n+1} = 1.06\, x_n - 5$, $x_0 = 100$

$x_{n+1} - 1.06\, x_n = -5$

Homogen ligning: $x_{n+1} - 1.06\, x_n = 0$

Løsning: $x_n^h = C(1.06)^n$.

Hva med én løsning av

(**) $x_{n+1} - 1.06\, x_n = -5$?

Prøver med x_n samme form som HS.

$x_n^p = A$ der A skal bestemmes.

Setter inn

$A - 1.06\, A = -5$

$0.06\, A = 5$, $A = \frac{5}{0.06} = \frac{250}{3}$

Altså er $x_n^p = \frac{250}{3}$ én løsning av (**).

Generell løsning $x_n = x_n^h + x_n^p$

$x_n = C(1.06)^n + \frac{250}{3}$

$x_0 = 100$ gir

$100 = x_0 = C + \frac{250}{3}$, $C = \frac{50}{3}$

Endelig løsning

$x_n = \frac{50}{3}(1.06)^n + \frac{250}{3}$

Mer generelt

$$x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = f(n).$$

Hvordan finne x_n^p?

Generelt prinsipp: Prøv med en løsning på samme form som $f(n)$.

Tre tilfeller:

(i) $f(n)$ polynom av grad m.
Prøv med $x_n^p = g(n)$ der $g(n)$ er et generelt polynom av grad m.

(ii) $f(n)$ på formen $a^n P(n)$
Prøv med $x_n^p = a^n q(n)$ der q er et polynom av samme grad som P.

(iii) $f(n)$ på formen $b^n(A\sin(an) + B\cos(an))$
Prøv med
$x_n^p = b^n(C\sin(an) + D\cos(an))$

Ex. $x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n = -6n+1$

Hvordan finne en partikulær løsning x_n^p?

Prøver med $x_n^p = An + B$

Merk at $x_{n+2}^p = A(n+2) + B$

$x_{n+1}^p = A(n+1) + B$

Setter inn:

$$A(n+2) + B - (A(n+1) + B) - 6(An+B) = -6n+1$$

$$An + 2A + B - An - A - B - 6An - 6B = -6n+1$$

$$-6An + A - 6B = -6n+1$$

Skal dette holde må koeffisientene stemme: $-6A = -6$, $A - 6B = 1$

$A = 1$, $1 - 6B = 1$, $B = 0$

$x_n^p = n$.