Simulering av differenslign.

Komp. 6.2
6.3.

Observasjon 6.8. Det er minst to måter å løse en differensligning.

1. Finn en formel for løsningen. Går bare i spesielle tilfeller.

2. Generer verdiene rett fra ligningen. Kan gjøres nesten bestandig. Best på datamaskin.

Simulering av differenslign.

Utgangspunkt $x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = g(n)$.

$n = 0, 1, \ldots$

Løser m.h.p. x_{n+2}

$$x_{n+2} = g(n) - b x_{n+1} - c x_n \quad , b, c \in \mathbb{R}$$

Anta at x_0, x_1 er gitt.

Simulering: Gitt x_0, x_1.

for $n = 2, 3, \ldots, N$

$x_n = g(n-2) - b x_{n-1} - c x_n$

Print x_n

En mer generell ligning er

(\#) $x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n-2})$, $n = 2, 3, \ldots$

Anta x_0, x_1 gitt. Vi kan generere verdiene i (\#) ved

for $n = 2, 3, \ldots, N$

$x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n-2})$

Print x_n.

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
x_{pp}	x_p	x		
	x_{pp}	x_p		

$x_{pp} = x_0$; $x_p = x_1$

for $n = 2, 3, \ldots, N$

$\quad x = f(n, x_p, x_{pp})$

$\quad$ Print x

$\quad x_{pp} = x_p$; $x_p = x$;

Dette kan greit utvides til 3. ordens ligninger. eller høyere orden.

Ett eksempel på simulering.

Eksempel 6.27 i seksjon 6.5 i Komp.

Ligningen er

$$(*)\quad x_{n+2} - \frac{19}{3}x_{n+1} + 2x_n = -10, \quad x_0 = 2, \; x_1 = 8/3.$$

Viser at kar. ligning.

$$r^2 - \frac{19}{3}r + 2 = 0, \quad r_1 = 1/3, \; r_2 = 6.$$

Generell løsning av homogen ligning:

$$x_n^h = C(1/3)^n + D\,6^n$$

Partikulær løsning. Prøver med $x_n^p = A$. Setter inn i $(*)$ og får

$$A - \frac{19}{3}A + 2A = -10 \quad \text{løsning } A = 3.$$

Generell løsning av $(*)$ er

$$x_n = x_n^h + x_n^p = C(1/3)^n + D\,6^n + 3$$

Startverdier: $x_0 = 2$, $x_1 = 8/3$.

Innsatt:

$$\left.\begin{aligned} 2 = x_0 &= C + D + 3 \\ 8/3 = x_1 &= C \cdot 1/3 + D \cdot 6 + 3 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} C + D &= -1 \\ C + 18D &= -1 \end{aligned}$$

Løser og finner $C = -1$, $D = 0$

Dermed er løsningen

$$x_n = 3 - 3^{-n}.$$

Når n blir stor skal x_n gå mot 3.

Simulering av ligningen.

Hvis vi simulerer differensligningen foran ved hjelp av programmet vi utledet i starten får vi:

$\hat{X}_5 = 2.99588\ldots$

$\hat{X}_{10} = 2.99998\ldots$

$\hat{X}_{15} = 3.000012\ldots$

$\hat{X}_{20} = 3.0933\ldots$

$\hat{X}_{40} = 3.4111 \cdot 10^{14}$

Forklaring på eksemplet foran seksjon. 6.5.1

Ligning er

$$x_{n+2} = -10 + \frac{19}{3} x_{n+1} - 2x_n \quad x_0 = 2, \; x_1 = 8/3.$$

19/3 og 8/3 kan ikke representeres eksakt. I stedet får vi de nærmeste flyttallene. Det betyr at vi generer verdiene gitt ved

$$x_{n+2} = -10 + \left(\frac{19}{3} + \delta\right) x_{n+1} - 2x_n, \quad x_0 = 2, \; x_1 = 8/3 + \varepsilon$$

Det å erstalle 19/3 med $19/3 + \delta$ er ikke kritisk!

Altså er generell løsning av ligningen vi simulerer

$$x_n = C(1/3)^n + D\,6^n + 3.$$

Men bestemmelse av C og D blir annerledes:

$$2 = x_0 = C + D + 3$$

$$8/3 + \varepsilon = x_1 = \frac{C}{3} + 6D + 3, \quad |\varepsilon| \le 10^{-16}$$

Løser og finner $C = -1 - \frac{3}{17}\varepsilon$

$$D = \frac{3}{17}\varepsilon$$

Følgen som beregnes på datamaskin vil altså være

$$x_n = \left(-1 - \frac{3}{17}\varepsilon\right) 3^{-n} + \frac{3}{17}\varepsilon\, 6^n + 3, \quad |\varepsilon| \le 10^{-16}$$

Når blir det katastrofe?
Jo, det er når startverdiene gir en eksakt løsning der koeffisienten foran for roten med størst tallverdi skal være eksakt null. Avrendingsfeil vil kunne føre til at denne koeff. i stedet blir en liten ε. Når n blir stor vil dette kunne ødelegge den ønskede løsningen fullstendig.