Simulering av en differensligning.

Seksjon 6.5 i Komp.

$x_{n+2} - \frac{19}{3} x_{n+1} + 2x_n = -10, \quad x_0 = 2, \ x_1 = 8/3.$

$x_{n+2} = -10 + \frac{19}{3} x_{n+1} - 2x_n.$

Simulering gir $\hat{x}_{40} \approx 10^{14}.$

Hvorfor?

Kar. ligning. $r^2 - \frac{19}{3} r + 2 = 0$

$r_1 = 1/3, \quad r_2 = 6.$

$x_n^h = C(1/3)^n + D\,6^n$

Partikulær løsning: $x_n^p = 3$

Generell løsning

$$x_n = C(1/3)^n + D\,6^n + 3$$

Startverdiene gir $C = -1, \quad D = 0.$

Endelig løsning $x_n = 3 - (1/3)^n = 3 - 3^{-n}$

$x_n \to 3$ når $n \to \infty.$

Forklaring: Startverdiene er $x_0 = 2$, $x_1 = 8/3$. $8/3$ kan vi ikke representere eksakt. Får i steden

$x_0 = 2$, $\underbrace{x_1 = 8/3 + \varepsilon}_{\text{Nærmeste flyttall til } 8/3.}$, der $|\varepsilon| \leq 10^{-16}$

Hva blir da løsningen?

$$\hat{x}_n = 3 - \left(1 + \frac{\varepsilon}{17}\right) 3^{-n} + \underbrace{\frac{3}{17}\varepsilon}_{10^{-17}} \overbrace{6^n}^{10^{31}}.$$

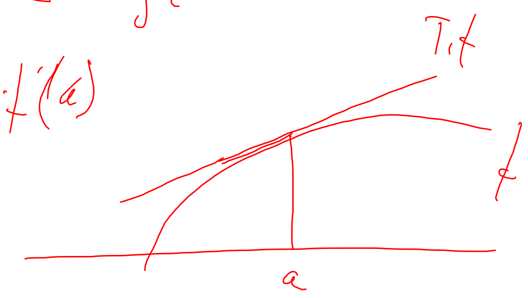
Taylorpolynomer

I mange situasjoner er det nyttig (nødvendig) å tilnærme en komplisert funksjon med en som er enkel.

Fint å tilnærme med polynomer!

Eks. Tangenten til en funksjon f i et punkt a er gitt ved

$$T_1 f(x) = f(a) + (x-a)\cdot f'(a)$$



$$T_1 f(a) = f(a)$$

$$(T_1 f)'(a) = f'(a)$$

Kan vi utvide dette til polynomer av grad 2.

Da er tilnærmingen på formen

$$g(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2$$

der a er punktet vi tar utgangspkt.

Ønsker $g(a) = f(a),\quad g'(a) = f'(a),\quad g''(a) = f''(a)$

Vi ser at $g'(x) = c_1 + 2c_2(x-a)$

$$g''(x) = 2c_2$$

$g(a) = f(a), \quad f(a) = g(a) = c_0$

$g'(a) = f'(a), \quad f'(a) = g'(a) = c_1$

$g''(a) = f''(a), \quad f''(a) = g''(a) = 2c_2$

Derfor
$$g(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2$$
$$= f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)(x-a)^2/2.$$

Generalisering til grad n

Da ønsker vi at et polynom g av grad n skal tilfredstille

$g(a) = f(a)$, $g'(a) = f'(a)$, $g''(a) = f''(a)$

$\ldots$, $g^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$.

Setning 11.1.1

$$g(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$= (T_n f)(x)$$

<u>Eks.</u> Taylorpolynomet til $f(x)=e^x$ om $a=0$.

$$T_n f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + f^{(n)}(a)(x-a)^n/n!$$

$$= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2}(x-0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n$$

$$= f(0) + f'(0)\cdot x + f''(0)\cdot\frac{x^2}{2} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$f(x)=e^x$

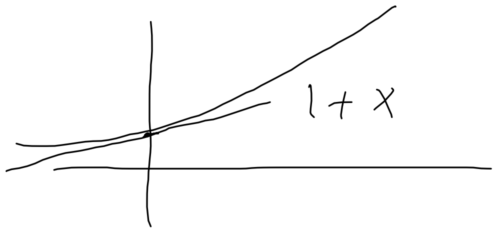
Må derivere $f(x)$:

$f(x)=e^x$, $f'(x)=e^x$, $f''(x)=e^x$, $\dots$ $f^{(n)}(x)=e^x$

$f(0)=1$, $f'(0)=1$, $-$ $f''(0)=1$, $\dots$, $f^{(n)}(0)=1$

$$T_n f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$



Taylorpolynomene til $f(x) = \sin x$ om $a=0$.

$$T_n f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

$a=0$, $f(x) = \sin x$.

$f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$

Dette må gjenta seg. $f''''(x) = \sin x$

$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$,

$f''''(0) = 0$

$$(T_n f)(x) = 0 + \overset{1}{x} + 0 - \overset{-1}{\frac{x^3}{6}} + 0 + \frac{x^5}{120} + 0 - \frac{x^7}{7!} - \cdots$$

Taylorpolynomene til e^x, $\cos x$, $\sin x$.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} - \cdots$$

Hva er sammenhengen?

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$