Taylorpolynomer, repetisjon.

Hvis f er en gitt funksjon og a et gitt tall er Taylorpolynomet til f om a av grad n

$$g(x) = T_n f(x;a) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) + \cdots + \frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a)$$

Taylorpolynomet er bestemt fra betingelsene

$$g^{(i)}(a) = f^{(i)}(a), \quad i = 0,1,\ldots,n.$$

Feilen er gitt ved

$$R_n f(x;a) = \frac{1}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c), \quad c \in (a,x)$$

Eksempel 9.10 i komp

Taylorpolynomet til $f(x) = \ln x$ om $a = 1$.

$$T_n f(x;1) = f(1) + (x-1)f'(1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 f''(1) + \dots + \frac{1}{n!}(x-1)^n f^{(n)}(1)$$

Må ha generell formel for den n'te deriverte til $f(x) = \ln x$.

Vi vet at $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $f''(x) = -x^{-2}$

$f'''(x) = 2x^{-3}$, $f^{iv}(x) = -6x^{-4}$.

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!\, x^{-n}$

Vi evaluerer i $a = 1$.

$f(1) = \ln 1 = 0$, $f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}(n-1)!\, 1^{(-n)}$ $=1$

$$T_n f(x;1) = f(1) + (x-1)f'(1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 f''(1) + \dots + \frac{1}{n!}(x-1)^n f^{(n)}(1)$$

$$= 0 + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2(-1) + \dots + \frac{1}{n!}(x-1)^n(-1)^{n+1}(n-1)!$$

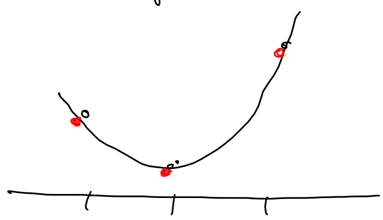
$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \dots + \frac{(x-1)^n}{n}(-1)^{n+1}$$

Ser at dette kan ikke konvergere når $x > 2$.

Interpolasjon   sek. 9.2 i Komp.

Hvis vi har to punkter i planet kan vi finne en rett linje som går gjennom punktene.

Hva om jeg har tre punkter?

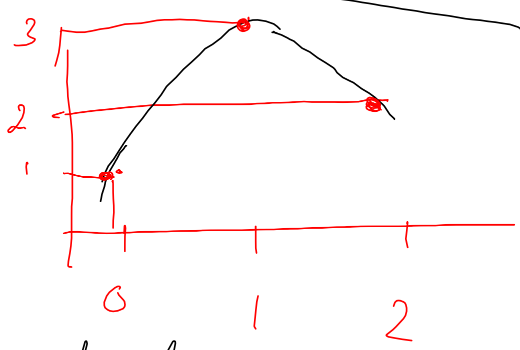


Eks. 9.12.

- La punktene være $(0,1)$, $(1,3)$, $(2,2)$

Vi prøver å finne 2. grads polynom $\boxed{P(x)=c_0+c_1x+c_2x^2}$ slik at

$P(0)=1$, $P(1)=3$, $P(2)=2$



$1 = P(0) = c_0$

$3 = P(1) = c_0 + c_1 + c_2$

$2 = P(2) = c_0 + 2c_1 + 4c_2$

c_0, c_1, c_2 må løse ligningssystemet

$$\left.\begin{aligned} c_0 \qquad\qquad &= 1 \\ c_0 + c_1 + c_2 &= 3 \\ c_0 + 2c_1 + 4c_2 &= 2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow c_0 = 1,\quad c_1 = 7/2,\quad c_2 = -\frac{3}{2}$$

$$P(x) = 1 + \frac{7}{2}x - \frac{3}{2}x^2$$

1

Samme eksempel en gang til med en ny:

Vi skriver $P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x(x-1)$

Husk betingelsene: $P(0)=1,\ P(1)=3,\ P(2)=2.$

$1 = P(0) = c_0 \quad , \quad c_0 = 1$

$3 = P(1) = c_0 + c_1, \quad c_1 + 1 = 3, \quad c_1 = 2$

$2 = P(2) = c_0 + 2c_1 + 2c_2 = 1 + 2 \cdot 2 + 2c_2, \quad 2c_2 = -3$

$P(x) = 1 + 2x - \frac{3}{2}x(x-1) \qquad c_2 = -\frac{3}{2}$

Newton formen

Anta at vi skal finne et polynom p av grad n slik at

$p(x_0) = y_0$, $p(x_1) = y_1$, $p(x_2) = y_2$, ..., $p(x_n) = y_n$.

Da lønner det seg å skrive p på formen

$$p(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots$$

$$+ c_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})$$

$P(x_0) = y_0 \quad , \quad P(x_1) = y_1 \quad , \quad P(x_2) = y_2$

$P(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1)$

$y_0 = P(x_0) = c_0$

$y_1 = P(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0) \quad , \quad c_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_0 - x_1}$

$y_2 = P(x_2) = c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$

Kan finne c_2.