Interpolasjon, oppsummering

Komp. Seksjon 9.2

Utgangspunkt: Gitt $n+1$ punkter

$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$

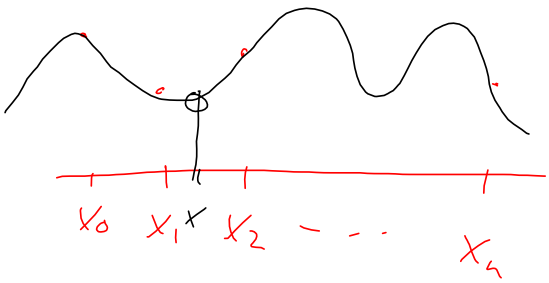
Kan vi finne et polynom P av grad n som tilfredstiller $P(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Tenker ofte at $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.

Teorem.

Det fins et entydig polynom P av grad n som løser problemet over, $P(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Så sant $x_i \neq x_j$ for alle i og j.



Det lønner seg å skrive polynomet på Newton-form:

$$P(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$+ c_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1})$$

Løse ligninger

Komp Kap 6. seksjon 6.2.

Svært viktig i mange anvendelser.

To strategier for å løse ligninger:

(i) Finn en formel for løsningen.
Funker bare i noen spesielle tilfeller.
1. grad, 2. grad, trigonometriske etc.

(ii) Finn en numerisk tilnærming med ønsket nøyaktighet.
Funker for nesten alle ligninger!

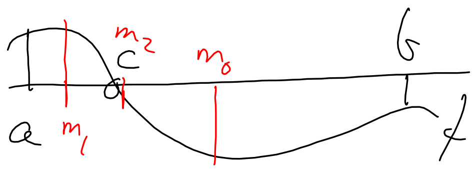
Halveringsmetoden

Tar utgangspunkt i skjæringssetningen.

Hvis f er kontinuerlig på $[a,b]$ og har motsatt fortegn i a og b, $f(a)f(b) < 0$ så fins det en $c \in (a,b)$ s.a. $f(c) = 0$.

Ide: Gjett på midtpunktet.

Da blir $[a,b]$ delt i to halvdeler. For en av disse vil funksjonsverdiene i endene ha motsatt fortegn. Det betyr at vi kan fortsette prosessen.



Algoritme 16.2. Anta at f er gitt og at a og b er slik at $f(a)f(b)<0$. Dessuten at vi kan regne ut $f(x)$ for alle $x\in[a,b]$. Da vil følgende algoritme regne ut en tilnærming til en c slik at $f(c)=0$.

$a_0 = a$; $b_0 = b$;

for $i = 1, 2, \ldots, N$

$m_{i-1} = (a_{i-1} + b_{i-1})/2$

if $f(m_{i-1}) == 0$ hurra!

if $f(a_{i-1})f(m_{i-1}) < 0$

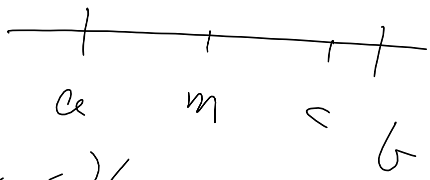
$a_i = a_{i-1}$; $b_i = m_{i-1}$

else

$a_i = m_{i-1}$; $b_i = b_{i-1}$

$m_N = (a_N + b_N)/2$

Feil.



Feil er maks $(b-a)/2$.