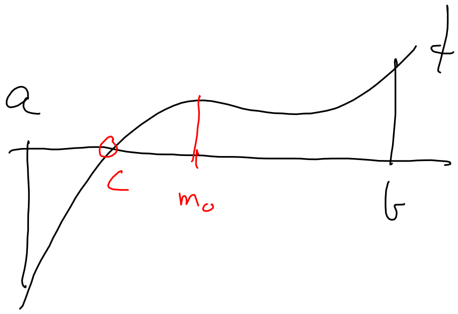
Halveringsmetoden,

Seksjon 16.2 i Komp.



$f(a)f(b) < 0$

Fins c slik at $f(c) = 0$

Feil etter i halveringer er begrenset av

$\frac{|b-a|}{2^{i+1}}$ (absolutt feil)

$$|m_i - c| \le \frac{b-a}{2^{i+1}}$$

Hva med relativ feil?

Den er gitt ved

$$\frac{|m_i - c|}{|c|} < \frac{b-a}{|c|\,2^{i+1}} \approx \frac{b-a}{|m_i|\,2^{i+1}}$$

while $\frac{|b-a|}{|m_i|\,2^{i+1}} > 10^{-10}$:

halver $[a,b]$

$m_i = \dots$

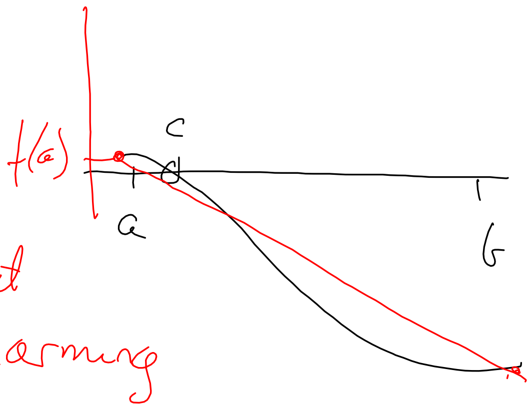
NB! Problem hvis m_i blir 0.

Alternativ formulering,

while $|b-a| > 10^{-10} \cdot |m_i| \cdot 2^{i+1}$:

Alternativer til halveringsmetoden.

1. Sekantmetoden.
Vi tilnærmer f med sekanten gjennom a og b. og bruker nullpkt til sekanten som en tilnærming til c.



Sekanten er gitt ved formelen

$$s(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Nullpkt for $s(x) = 0$.

$$= a - \frac{a - b}{f(a) - f(b)} f(a)$$

Da finner vi $x^* = b - \dfrac{b - a}{f(b) - f(a)} f(b)$

Algoritme 10.11. Gitt x_0 og x_1:

for $i = 2, 3, \ldots, N$

$$x_i = x_{i-1} - \frac{x_{i-1} - x_{i-2}}{f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})} f(x_{i-1}).$$

Estimere feil i sekantmetoden.

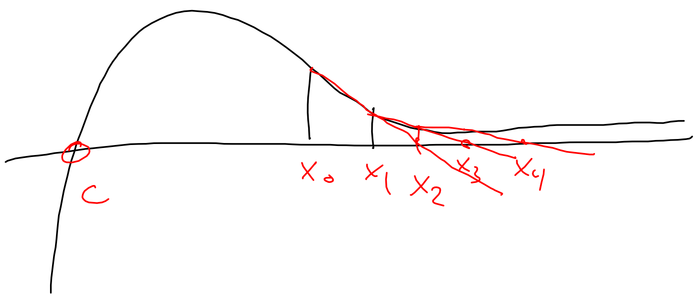
Vi genererer en følge $\{x_i\}$ som vi håper konvergerer mot et nullpkt c.

Relativ feil: $\dfrac{|x_i - c|}{|c|} \approx \dfrac{|x_i - c|}{|x_i|} \approx \dfrac{|x_i - x_{i-1}|}{|x_i|}$

Stopper når $\dfrac{|x_i - x_{i-1}|}{|x_i|} < \varepsilon$

$$|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon |x_i|$$

Eksempel der sekantmetoden svikter:



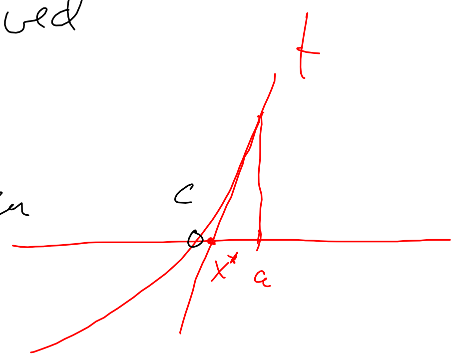
Newtons metode

Ide: Bytt ut sekanten med tangenten.

Anta at a og f er gitt. Tangenten til f i a er gitt ved

$$T(x) = f(a) + (x-a)\, f'(a)$$

Bruker nullpkt til tangenten som en tilnærming til nullpkt. til f.



$T(x) = 0$ gir $x^* = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$