Numerisk derivasjon

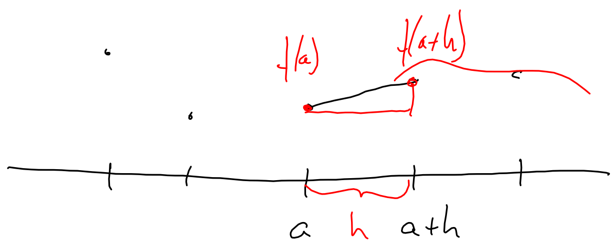
Kap. 11 i komp.
Seksjon 11.1.1
11.2

Anta at vi trenger å derivere en funksjon f som bare er kjent i isolerte punkter. Hva gjør vi da?

Husk definisjonen av den deriverte:

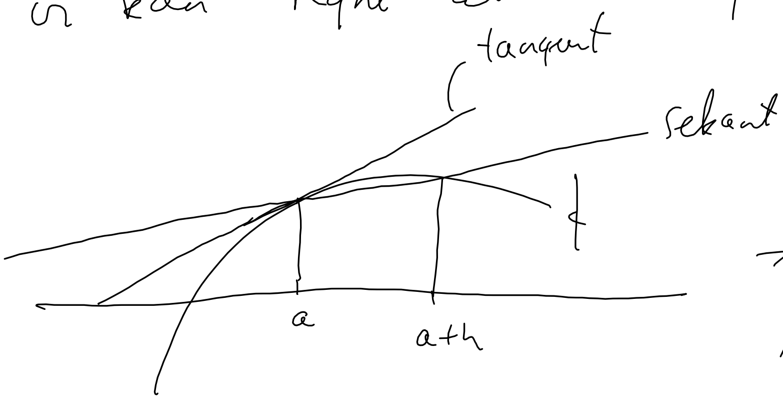
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

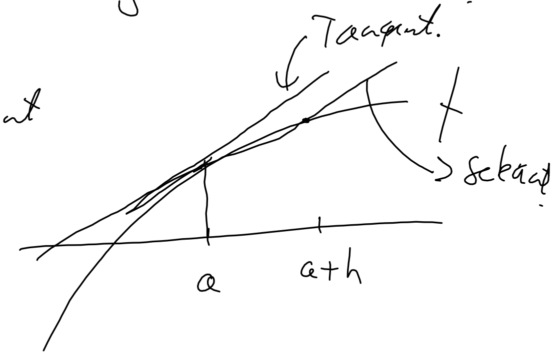
for en passende $h > 0$.



Bruker stigningstallet som en tilnærming til $f'(a)$

Hva svarer dette til for en funksjon der vi kan regne ut alle funksjonsverdiene?





Hvordan framkom $f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$?

1. Tilnærm f med en rett linje P_1 gjennom $(a, f(a))$ og $(a+h, f(a+h))$
2. Tilnærm $f'(a)$ med $P_1'(a)$.

$$f'(a) \approx P'(a).$$

Mer presist.

$$P_1(x) = f(a) + \frac{f(a+h)-f(a)}{h}(x-a)$$

$$P_1'(x) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

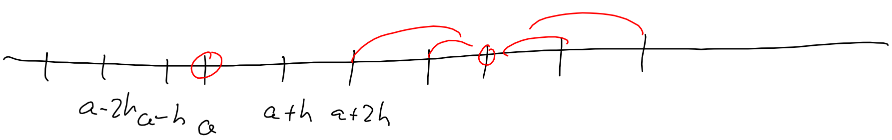
Kan finne andre metoder ved å interpolere f med polynom P_n av grad n i $(n+1)$ punkter og bruke

$$f'(a) \approx P_n'(a).$$

Eksempler:

Punkter	Grad	Tilnærming
$f(a), f(a+h)$	1	$f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
$f(a-h), f(a), f(a+h)$	2	$f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$
$f(a-2h), f(a-h), f(a)$ $f(a+h), f(a+2h)$	4	$f'(a) \approx \frac{(f(a-2h) - 8f(a-h) + 8f(a+h) - f(a+2h))}{12h}$

$$f'(a) \approx \frac{f(a-2h) - 8f(a-h) + 8f(a+h) - f(a+2h)}{12h}$$



$$f(a+h) = f(a) + h f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(\xi)$$

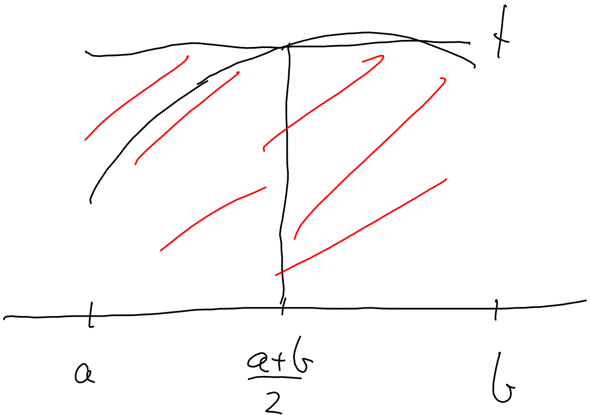
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) + \frac{h}{2} f''(\xi)$$

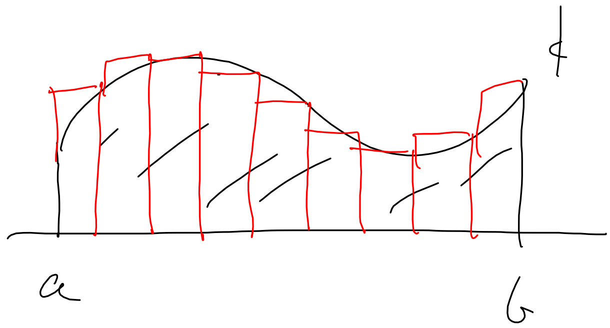
$$f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = -\frac{h}{2} f''(\xi)$$

Numerisk integrasjon.

Gitt f og et intervall $[a,b]$.

$\int_a^b f(x)\,dx$ – arealet under grafen til f.





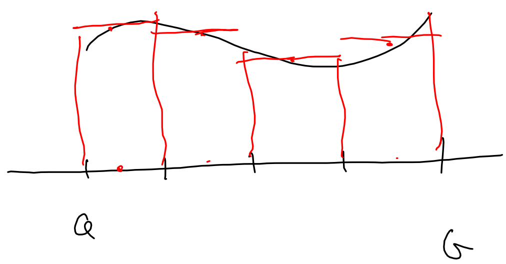
Vi bruker tilnærmingen

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Generell strategi:

1. Del intervallet $[a,b]$ i n like store deler.
2. På delintervall i, bruk verdien til f i midtpunktet som høyden på stolpen.

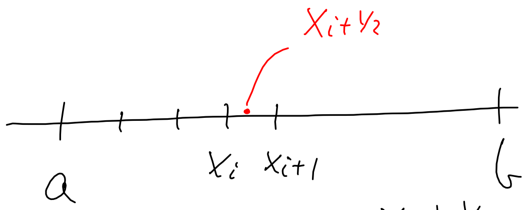
Midtpunktmetoden for numerisk integrasjon.



Algoritme for å regne ut en tilnærming til $\int_a^b f(x)\,dx$. (n oppdelinger).

1. $h = (b-a)/n$, Punkter $\underset{x_0}{a}, \underset{x_1}{a+h}, \underset{x_2}{a+2h}, \ldots, \underset{x_n}{a+nh=b}$

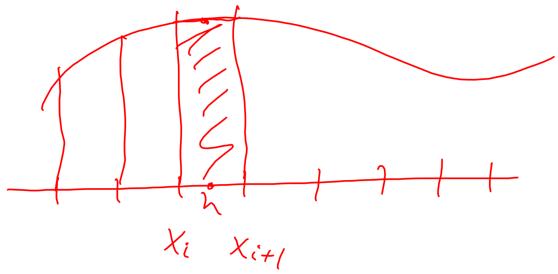
2. På intervallet $[x_i, x_{i+1}]$ bruker vi



$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx (x_{i+1}-x_i)\,f(x_{i+1/2}), \qquad x_{i+1/2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

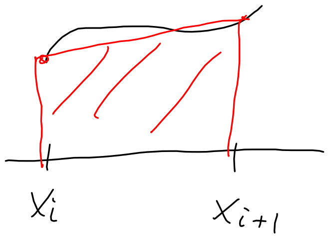
$$= h\,f(x_{i+1/2})$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} h\,f(x_{i+1/2})$$



Forbedringer av midtpunktmetoden:
Bruk bedre tilnærming på hvert intervall!

1.



Interpolerer f i $(x_i, f(x_i))$ og $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$

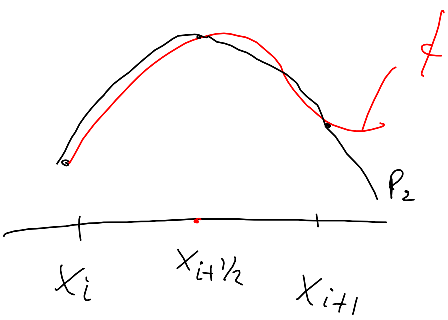
$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx (x_{i+1}-x_i)\,\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}$$

Trapesmetoden

Summer opp over hvert intervall

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

2.



$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_2(x)\,dx$$

Simpsons formel.