(Numerisk løsning av)
differensialligninger

Vi har gitt ligningen $\boxed{x' = f(t, x)}$
der $x = x(t)$ er en ukjent funksjon.

Eks. $x' = t + \sin(t + x)$.

Dette gir en hel familie av løsninger
Vi må legge til en en startverdi
$x(a) = x_0$ for å få en entydig løsning.

Eulers metode.

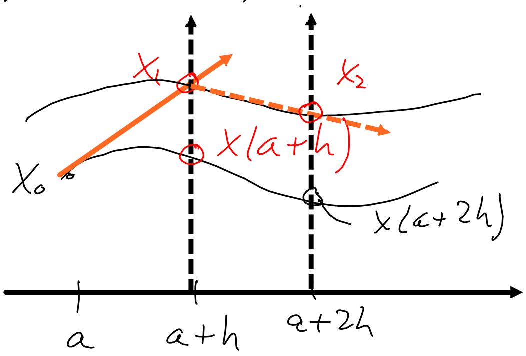
Hvordan kommer vi fra startverdien til en tilnærming $x_1 \approx x(a+h)$?

$x' = f(t,x), \quad x(a) = x_0$

$\boxed{x' = t + x \quad , x(0) = 1}$

$x'(t) = t + x(t), \quad x''(t) = 1 + x'(t)$

$x'(0) = 0 + x(0) = 0 + 1 = 1$



Tangenten $T_0(t) = x(a) + (t-a)\,x'(a)$ $\quad f(a, x_0)$

$= x_0 + (t-a)\,f(a, x(a))$

Følger tangenten til $a+h$:

$$x(a+h) \approx x_1 = T_0(a+h) = x_0 + h\,f(a, x_0)$$

Algoritme: Gitt $x' = f(t,x), \quad x(a) = x_0$

$t_0 = a$

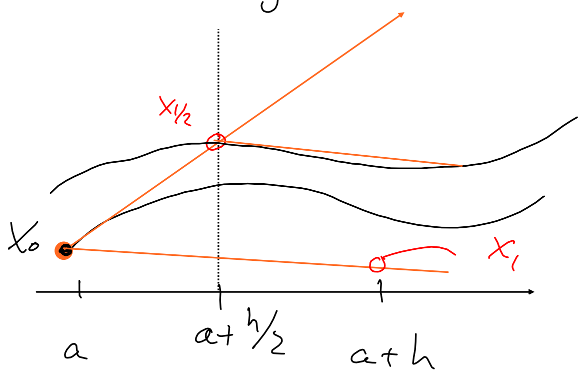
for $k = 0, 1, 2, \ldots$

$x_{k+1} = x_k + h\,f(t_k, x_k)$

$t_{k+1} = a + (k+1)h$

Euler midtpunktmetode

Ser stadig på $x' = f(t,x)$, $x(a) = x_0$



Algoritme

$t_0 = a$

for $k = 0, 1, \ldots$

$$x_{k+1/2} = x_k + \frac{h}{2} f(t_k, x_k)$$

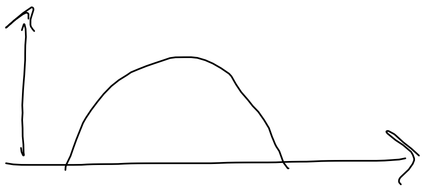
$$x_{k+1} = x_k + h f\left(t_k + \frac{h}{2}, x_{k+1/2}\right)$$

$$t_{k+1} = a + (k+1)h$$

Løsning av systemer av ligninger.

Hvis vi slepper en ball beskrives det av ligningen $v' = g - \frac{c}{m} v^2$.

Hvis jeg kaster ballen skjer bevegelsen i et plan.



Vertikalt

$$v_1' = g - \frac{c}{m} v_1^2$$

Horisontalt

$$v_2' = -\frac{c}{m} v_2^2 \quad (\text{ingen gravitasjon})$$

Vi kan innføre vektornotasjon for å håndtere dette.

Et eksempel til:

$x(t), y(t), z(t)$ ukjente funksjoner

$$x' = xy + \cos z, \quad x(0) = 1$$
$$y' = 2 - t^2 + z^2 y, \quad y(0) = 0$$
$$z' = \sin t - x + y, \quad z(0) = 3$$

Ved hjelp av vektornotasjon kan vi bruke Eulers metode i slike situasjoner

Vektornotasjon

$$x' = xy + \cos z, \quad x(0) = 1$$
$$y' = 2 - t^2 + z^2 y, \quad y(0) = 0 \; (*)$$
$$z' = \sin t - x + y, \quad z(0) = 3$$

Vi setter

$\bar{x} = (x, y, z)$

$\bar{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$$f_1(t, \bar{x}) = f_1(t, x, y, z) = xy + \cos z$$
$$f_2(t, \bar{x}) = f_2(t, x, y, z) = 2 - t^2 + z^2 y$$
$$f_3(t, \bar{x}) = f_3(t, x, y, z) = \sin t - x + y$$

Da kan ~~(*)~~ skrives

$$\boxed{\bar{x}' = \bar{f}(t, \bar{x})}$$

Eulers metode for en ligning:

$$x_{k+1} = x_k + h f(t_k, x_k) \qquad (\text{fra } t_k \text{ til } t_{k+1})$$

Eulers metode i vektortilfellet:

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + h \bar{f}(t_k, \bar{x}_k)$$

Eksempel:

$$(\#)\quad \begin{aligned} x_1' &= x_1 + \sin x_2, \quad & x_1(0) = 1 \\ x_2' &= x_2 + \cos x_1, \quad & x_2(0) = 0 \end{aligned}$$

$$\bar{x} = (x_1, x_2)$$

$$f_1(t, \bar{x}) = f_1(t, x_1, x_2) = x_1 + \sin x_2$$

$$f_2(t, \bar{x}) = f_2(t, x_1, x_2) = x_2 + \cos x_1$$

Da kan vi skrive $(\#)$ som

$$\bar{x}' = \bar{f}(t, \bar{x}), \quad \bar{x}(0) = (1, 0)$$

Eulers metode:

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + h\,\bar{f}(t_k, \bar{x}_k)$$

Skriver ut $\bar{x}_{k+1} = (x_1^{k+1}, x_2^{k+1})$

$$(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}) = (x_1^k, x_2^k) + h\left(f_1(t_k, x_1^k, x_2^k), f_2(t_k, x_1^k, x_2^k)\right)$$

Altså

$$x_1^{k+1} = x_1^k + h\,f_1(t_k, x_1^k, x_2^k) = x_1^k + h(x_1^k + \sin x_2^k)$$

$$x_2^{k+1} = x_2^k + h\,f_2(t_k, x_1^k, x_2^k) = x_2^k + h(x_2^k + \cos x_1^k)$$