Numerisk løsning av differensial-ligninger.

Vi ser på ligninger på formen

$$\bar{x}' = \bar{f}(t, \bar{x}), \quad \bar{x}(a) = x_0,$$

Eulers metode:

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + h\,\bar{f}(t_k, \bar{x}_k), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

$$t_k = a + kh$$

Når vi jobber med vektorer har vi en vektor $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ av ukjente funksjoner og $\bar{f}(t, \bar{x}) = (f_1(t, \bar{x}), \ldots, f_N(t, \bar{x}))$ angir høyresiden i N ligninger.

Høyere ordens ligninger
som et system av 1. ordens ligninger.

Eksempel. Vi har ligningen

(*) $x'' = t^2 + \sin(x + x')$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$

Vi setter $x_2 = x'$. Da er $x_2' = x''$

Innsatt i (*) gir det

$$x_2' = t^2 + \sin(x + x_2), \quad x(0) = 1, \; x_2(0) = 0$$

Hvis vi også setter $x_1 = x$ har vi totalt

$x_1(0) = 1$ $\qquad x_1' = x'$

$x_1' = x_2$ $\qquad x_1' = x_2$

$x_2' = t^2 + \sin(x_1 + x_2)$, $x_2(0) = 0$

Dermed har vi skrevet (*) på formen

$\bar{x}' = \bar{f}(t, \bar{x})$ og kan bruke

Euler, Euler midtpunkt etc for

å løse ligningen numerisk.

Separable ligninger

Seksjon 16.9 i Kalkulus.

Merk: Notasjonen er annerledes.
Det vi har skrevet som $x' = f(t,x)$ skrives i Kalkulus som $y' = f(x,y)$.
Den ukjente er funksjonen $y(x)$.

En ligning er separabel om den kan skrives som $q(y)\,y' = p(x)$

Ex 16.9.1 (4)

$$e^{-x} y' = 1 + y^2$$

Kan skrives som

$$\underbrace{\frac{1 \cdot y'}{1+y^2}}_{q(y)} = \underbrace{e^x}_{p(x)}$$

Integrerer m.h.p x på begge sider

$$\int \frac{y'\,dx}{1+y^2} = \int e^x\,dx = e^x + C$$

$$= \int \frac{y'(x)\,dx}{1+y(x)^2}$$

Sett $u = y(x)$
$du = y'(x)\,dx$

$$= \int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u = \arctan y(x)$$

Hvis vi samler sammen

$$\arctan y(x) = e^x + C$$

Ta tan på begge sider

$$y(x) = \tan(e^x + C)$$

1. ordens lineære ligninger

Dette er ligninger på formen

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x) \quad \forall x \in I.$$

for alle

I - intervall

Generell løsningsstrategi:

La $F(x)$ være en antiderivert av $f(x)$, slik at $F'(x) = f(x)$.

Multipliser med $e^{F(x)}$ på begge sider

$$e^{F(x)} y'(x) + e^{F(x)} f(x) y(x) = e^{F(x)} g(x)$$

$$= \left(e^{F(x)} y(x)\right)' = e^{F(x)} f(x) y(x) + e^{F(x)} y'(x)$$

$$\left(e^{F(x)} y(x)\right)' = e^{F(x)} g(x)$$

Integrer på begge sider

$$e^{F(x)} y(x) = \int e^{F(x)} g(x) + C$$

Dermed er

$$y(x) = e^{-F(x)} \int e^{F(x)} g(x) + C e^{-F(x)}$$

Eks $y' + 2xy = x$

Her er $f(x) = 2x$ så $F(x) = x^2$

Ganger med e^{x^2} på begge sider

$$e^{x^2} y' + 2x \cdot e^{x^2} y = e^{x^2} \cdot x$$

dvs. $(e^{x^2} y)' = e^{x^2} \cdot x$

Altså $e^{x^2} y = \int x \cdot e^{x^2} \, dx$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

Dermed er

$$y(x) = e^{-x^2} \left(\frac{1}{2} e^{x^2} + C \right)$$

$$= \frac{1}{2} + C \cdot e^{-x^2}$$

Hvis $y(0) = 1$. får vi

$$1 = y(0) = \frac{1}{2} + C, \quad \Rightarrow C = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-x^2}$$

Eksempel på separabel ligning

Skal ha dette på formen $q(y)\,y' = p(x)$

$$xy' = y + xy$$
$$= y(1+x)$$

Dermed er $\frac{y'}{y} = \frac{1+x}{x} = 1 + \frac{1}{x}$, $\quad x \neq 0,\ y(x) \neq 0$

Integrerer $\int \frac{y'}{y}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$

$$\ln|y| = x + \ln|x| + C$$

Altså er $|y| = e^{x + \ln|x| + C} = e^C |x| e^x$

$$|y(x)| = e^C |x| e^x$$

Sjekk tilfeller

i) $y(x) > 0,\ x > 0$ $\quad$ Da er $y(x) = e^C \cdot x \cdot e^x$

ii) $y(x) < 0,\ x > 0$ $\quad -y(x) = e^C \cdot x \cdot e^x$
$y(x) = -e^C \cdot x \cdot e^x$

iii) $y(x) < 0,\ x < 0$ $\quad -y(x) = -e^C \cdot x \cdot e^x$
$y(x) = e^C \cdot x \cdot e^x$

iv) $y(x) > 0,\ x < 0$ $\quad y(x) = -e^C \cdot x \cdot e^x$

Totalt $\quad y(x) = D \cdot x \cdot e^x, \quad D \neq 0$

Men fra opprinnelig ligning

$xy' = y + xy$ ser vi at $y(x) = 0$ er løsning. Dermed er endelig løsn.

$$y(x) = D \cdot x \cdot e^x, \quad D \in \mathbb{R}$$