Feilanalyse for numerisk derivasjon

Seksjon 11.1 i Komp

Definisjon av derivert at f i a

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad , \; h > 0$$

Hva er feilen i tilnærmingen?

Trunkeringsfeil

Vi tilnærmer $f'(a)$ med $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

med $h>0$, hva er feilen?

Nøkkel: Taylor! med feilledd.

$$f(a+h) = f(a) + h f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(\xi_h), \quad \xi_h \in (a, a+h)$$

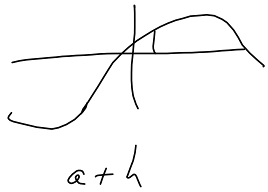
$$f(a+h) - f(a) = h f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(\xi_h)$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) + \frac{h}{2} f''(\xi_h)$$

$$f'(a) - \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = -\frac{h}{2} f''(\xi_h)$$

Dette gir essensen i feilen: Feilen reduseres med en faktor på 10 når h reduseres med en faktor på 10.

Hva med $f''(\xi_h)$?



Eks. $f(x) = \sin x$, $a = 0.5$

$f''(x) = -\sin x$, $h=0.1$ $\xi_h \in (0.5, 0.6)$

$f''(\xi_h) = -\sin \xi_h$, $\xi_h \in (0.5, 0.6)$

på dette intervallet er sin x stigende

det vil si at

$0.05 \cdot \sin \xi_h \in 0.05(\sin 0.5, \sin 0.6)$

$\approx (2.397 \cdot 10^{-2}, 2.823 \cdot 10^{-2})$

I praksis kan vi si at

$\frac{h}{2} \sin(\xi_h) \approx \frac{h}{2} \sin(a) = \frac{h}{2} \overset{\sin 0.5}{\cancel{0.2397}}$

Med andre ord

$f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \approx -\frac{h}{2} f''(a)$, $f''(\xi_h) \approx f(a)$

Med tallverdi

$\left| f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right| \approx \frac{h}{2} |f''(a)|$

Uten tilnærminger

Vi har

$$f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = -\frac{h}{2} f''(\xi_h), \quad \xi_h \in (a, a+h)$$

$$\left| f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right| \leq \frac{h}{2} \max_{x \in [a, a+h]} |f''(x)|$$

Avrundingsfeil

Når vi regner ut $f(a)$ så får vi $\overline{f(a)}$ der

$$\frac{\overline{f(a)} - f(a)}{f(a)} = \varepsilon_1 \quad , \quad |\varepsilon_1| \leq 2^{-53} \approx 10^{-16}$$

Kan skrives $\overline{f(a)} = f(a)(1+\varepsilon_1)$

Tilsvarende $\overline{f(a+h)} = f(a+h)(1+\varepsilon_2)$

$$|\varepsilon_2| \leq 2^{-53} \approx 10^{-16}$$

Analyse av avrundingsfeil

Vi regner ut $\frac{\overline{f(a+h)} - \overline{f(a)}}{h}$

(dette er de viktige avrundingene).

Feil

$$f'(a) - \frac{\overline{f(a+h)} - \overline{f(a)}}{h} = f'(a) - \frac{f(a+h)(1+\varepsilon_2) - f(a)(1+\varepsilon_1)}{h}$$

$$= f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{f(a+h)\varepsilon_2 - f(a)\varepsilon_1}{h}$$

$$= -\frac{h}{2} f''(\xi_h) - \frac{f(a+h)\varepsilon_2 - f(a)\varepsilon_1}{h}$$

$$\approx -\frac{h}{2} f''(a) - \frac{f(a)\varepsilon_2 - f(a)\varepsilon_1}{h}$$

$$= -\frac{h}{2} f''(a) - f(a)\frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{h}$$

Kan utlede

$$\left| f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right| \le \frac{h}{2} M_1 + \frac{2\varepsilon^*}{h} M_2$$

der $M_1 = \max_{x \in [a, a+h]} |f''(x)|$, $M_2 = \max_{x \in [a, a+h]} |f(x)|$

$\varepsilon^* = 2^{-53}$.

Optimal h: Når blir H.S minst?

Deriver høgresiden m.h.p. h og sett lik 0

Det gir $\frac{M_1}{2} + 2M_2 \varepsilon^* (-1) h^{-2} = 0$

Løser m.h.p h $h = \sqrt{\frac{M_2}{M_1} \varepsilon^*} \cdot 2$

$$h^2 \frac{M_1}{2} = 2M_2 \varepsilon^*$$

h