Eksempel på løsing av inhomogen differensligning

Knut Mørken

26. september 2014

En førsteordens, inhomogen differensligning

I dette notatet skal vi studere differensligningen

$$x_{n+1} - 2x_n = 2^n, \quad x_0 = 1. \tag{1}$$

Vi ser at dette er en førsteordens, lineær, inhomogen differensligning med konstante koeffisienter. Fra teorien i Kalkulus (seksjon 4.2) vet vi at den generelle løsningen av ligningen kan uttrykkes som

$$x_n = x_n^h + x_n^p,$$

der x_n^h er den generelle løsningen av den homogene ligningen, mens x_n^p er en eller annen løsning av den inhomogene ligningen.

Løsning av den homogene ligningen

La oss først finne løsningen av den homogene ligningen

$$x_{n+1} - 2x_n = 0.$$

Vi vet at løsningen skal være på formen $x_n^h = r^n$ (se seksjon 4.1 i Kalkulus). Om vi setter dette inn i ligningen får vi at r må tilfredstille ligninen $r-2=0$ så $r=2$. Dermed er den generelle løsningen av den homogene ligningen

$$x_n^h = C2^n.$$

(Dette er helt analogt med løsning av andreordens ligninger. Forskjellen er at vi bare har en rot av den karakteristiske ligningen, slik at den generelle løsningen framkommer ved å multiplisere r^n med en vilkårlig konstant.)

En partikulær løsning

Poenget med dette eksempelet er å illustrere hvordan vi kan finne en spesiell, eller partikulær, løsning av (1). Vi følger oppskriften fra seksjon 4.2 i Kalkulus og prøver med en løsning på samme form som høyresiden. Høyresiden er på formen $a^n p(n)$ der $p(n)$ er et polynom av grad 0 (konstanten 1), mens $a = 2$. Oppskriften sier da at vi skal prøve med en løsning på formen $x_n^p = a^n q(n)$, der $q(n)$ er et vilkårlig polynom i n av samme grad som $p(n)$. Dette betyr at vi skal prøve med en løsning på formen

$$x_n^p = A2^n$$

der A er et vilkårlig, reelt tall. Vi observerer at da er $x_{n+1}^p = A2^{n+1}$ og om vi setter inn i (1) blir venstresiden

$$A2^{n+1} - 2A2^n = A2^{n+1} - A2^{n+1} = 0.$$

Dette skal bli lik høyresiden som er 2^n. Men dette er helt umulig å få til. Altså må antagelsen vår om formen på x_n^p være feil!

Hva gikk galt??

La oss stoppe opp og reflektere litt over hva som gikk galt. Problemet var at når vi satte $x_n^p = A2^n$ inn i venstresiden så fikk vi 0. Med andre ord løser $x_n^p = A2^n$ den homogene ligningen og dermed kan venstresiden umulig stemme overens med høyresiden som aldri blir 0. Når vi ser litt lengre tilbake, ser vi at $x_n^p = A2^n$ har akkurat samme form som den generelle løsningen $x_n^h = C2^n$ av den homogene ligningen.

Nytt forsøk: vi øker graden

Når dette skjer forteller oppskriften i Kalkulus at vi ofte kan finne en partikulær løsning ved å øke graden. I vårt tilfelle betyr dette at vi prøver med en løsning på formen $x_n^p = q(n)2^n$ der $q(n)$ er av grad 1 i n. Med andre ord prøver vi med

$$x_n^p = (An + B)2^n \tag{2}$$

der A og B er vilkårlige, reelle tall. I dette tilfellet er

$$x_{n+1}^p = (A(n+1) + b)2^{n+1} = (An + A + B)2^{n+1}.$$

Setter vi dette inn i (1) blir venstresiden

$$(An + A + B)2^{n+1} - 2(An + B)2^n = A2^{n+1}.$$

Skal dette stemme med høyresiden som er 2^n, for alle verdier av n, må

$$A2^{n+1} = 2^n.$$

Om vi forkorter bort 2^n står vi igjen med $2A = 1$ eller $A = 1/2$. Dermed har vi bestemt koeffisienten A i (2).

Men hva med B? Faktum er at vi har ikke fått noen betingelser på B. Hva betyr det? Jo, det kan ikke bety annet enn at vi kan velge B akkurat som vi vil. En god strategi i slike situasjoner å velge den enkleste verdien vi kan tenke oss, nemlig $B = 0$. Dermed er den partikulære løsningen

$$x_n^p = (An + b)2^n = \frac{1}{2}n2^n = n2^{n-1}.$$

Endelig løsning

Den generelle løsningen av (1) er dermed

$$x_n = x_n^h + x_n^p = C2^n + n2^{n-1}.$$

Startverdien $x_0 = 1$ gir da

$$1 = x_0 = C,$$

og dermed er den endelige løsningen

$$x_n = 2^n + n2^{n-1} = (2 + n)2^{n-1}.$$

Hva kan vi lære av dette?

Når du har lest et eksempel som dette er det som alltid lurt å tenke gjennom hva som skjedde, det er da du virkelig kan lære. Løsning av den homogene ligningen gikk fint. For å finne en partikulærløsning fulgte vi grunnoppskriften ved å prøve med en løsning på samme form som høyresiden. I dette tilfellet sviktet det. Årsak: høyresiden er på samme form som den homogene løsningen. Dermed må vi utvide oppskriften ved å øke graden på polynomdelen av partikulærløsningen. Da vi gjorde det kom vi i mål.

Merk at da vi økte graden kunne vi prøvd med løsningen $x_n^p = An2^n$ med en gang fordi vi jo vet at den andre delen $B2^n$ ikke gir mening.