Høyere ordens ligninger som et system av andre ordens ligninger

Komp. sek. 13.8

Eksempel. Vi har

(#) $x'' = t^2 + \sin(x + x')$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$

Vi setter $x_2 = x'$, egentlig $x_2(t) = x'(t)$

Vi kan derivere $x_2' = x''$

Altså er (#) da

$$x_2' = t^2 + \sin(x + x_2)$$

Vi setter også $x_1 = x$. Dermed kan (#) skrives

$$x_1' = x_2, \qquad x_1(0) = 1$$

$$x_2' = t^2 + \sin(x_1 + x_2), \qquad x_2(0) = 0$$

Endelig konklusjon: Ethvert system av differensial ligninger kan skrives som et system av 1. ordens ligninger.

Analytisk løsning av differensialligninger

Kalkulus Kap. 10.

Nå skal vi finne eksakt formel for løsningen, for noen klasser av ligninger, når det fungerer.

Første ordens lineære ligninger:

$y' + f(x)\,y = g(x)$, $\quad y' = g(x) - f(x)\,y$, $\quad (x' = F(t,x))$

$(x' + f(t)\,x = g(t))$

La $F(x)$ være en funksjon slik at $F'(x) = f(x)$

Multipliser ligningen med $e^{F(x)}$.

$$\underbrace{e^{F(x)} y' + f(x)\, e^{F(x)} y}_{} = e^{F(x)} g(x)$$

$$\left(e^{F(x)} y\right)' = e^{F(x)} g(x)$$

Integrer på begge sider

$$e^{F(x)} y = \int e^{F(x)} g(x) + C$$

$$y(x) = e^{-F(x)} \int e^{F(x)} g(x) + C\, e^{-F(x)}$$

<u>Eksempel.</u>

$$y' + 2x\, y = x$$

$f(x) = 2x$ så $F(x) = x^2$

Ganger med $e^{F(x)} = e^{x^2}$

$$e^{x^2} y' + 2x\, e^{x^2} y = x e^{x^2}$$

$$\left(e^{x^2} y \right)' = x\, e^{x^2}$$

$$e^{x^2} y = \int x\, e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

Altså er $y(x) = \frac{1}{2} + C e^{-x^2}$

Kan legge på en startverdi: $y(0) = 1$

$1 = y(0) = \frac{1}{2} + C$, $C = \frac{1}{2}$

$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-x^2}$$

Separable differensialligninger

En førsteordens differensialligning kalles separabel hvis den kan skrives som

$$q(y) \cdot y' = p(x).$$

__Eks.__ $e^{-x} y' = 1 + y^2$

Kan omskrives til $\frac{y'}{1+y^2} = e^x$

$$\int \frac{y'(x)}{1+y(x)^2} dx = \int e^x \, dx = e^x + C$$

Sett $u = y(x)$, $du = y'(x)\,dx$

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u = \arctan y(x)$$

Dermed er

$$\arctan y(x) = e^x + C$$

Tan på begge sider:

$$y(x) = \tan(e^x + C)$$

Krever at vi kan gjennomføre integrasjonen og løse med hensyn på y til slutt.

Eksempel

$$e^{-x}\, y y' = -1 \quad , \quad y \cdot y' = -e^{x}$$

$$\int y y'\, dx = -\int e^{x}\, dx = -e^{x} + C$$

$$\tfrac{1}{2} y^2 = -e^{x} + C$$

$$y^2 = 2C - 2e^{x} = D - 2e^{x}$$

Det vil $y(x) = \pm\sqrt{D - 2e^{x}}$ (to løsninger)

Anta at $y(0) = 4$, må ha positiv rot

$$4 = y(0) = \sqrt{D - 2} \quad , \quad 16 = D - 2 \quad , \quad D = 18 \quad ,$$

$$y(x) = \sqrt{18 - 2e^{x}}$$

NB! Hvis x blir for stor går dette galt.

Hvis $18 - 2e^{x} < 0$

$$2e^{x} > 18 \quad , \quad e^{x} > 9 \quad , \quad x > \ln 9 .$$

Må ha $x \leq \ln 9$.

Andreordens ligninger med konstante koeffisienter

Dette er en ligning på formen

$$y'' + p y' + q y = h(x) \quad , \quad p, q \in \mathbb{R}$$

Ser først på tilfellet $h(x) = 0$ (homogen lign).

$$(*) \quad y'' + p y' + q y = 0$$

Lemma. Hvis $y_1(x)$ og $y_2(x)$ begge er løsninger av $(*)$ er også

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

også en løsning for alle valg av C_1 og C_2.

Hvordan finner vi en løsning?

Husk at ligningen $y' + by = 0$

har løsningen $y(x) = Ce^{-bx}$

Dette er på formen e^{rx}

Vi prøver med noe sånt i andreordens ligningen. $y'' + Py' + qy = 0$

$y(x) = e^{rx}$, $y'(x) = re^{rx}$, $y''(x) = r^2 e^{rx}$

Innsatt:

$0 = y'' + Py' + qy = r^2 e^{rx} + Pre^{rx} + qe^{rx}$

$= e^{rx}(r^2 + Pr + q)$ for alle $x \in \mathbb{R}$

Da må $r^2 + Pr + q = 0$

Denne har generelt to røtter r_1 og r_2

så $y_1(x) = e^{r_1 x}$ og $y_2(x) = e^{r_2 x}$

er to løsninger og generell løsning blir da $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

Må skille mellom tre tilfeller

i) To reelle løsninger r_1 og r_2

ii) Vi kan få to løsninger som faller sammen til en, $r_1 = r_2$

iii) To komplekse konjugerte løsninger r og $\bar{r}$.

Eks. $y'' + y' - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

Kar. ligning

$z^2 + z - 2 = 0$

$z = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$

$r_1 = 1$, $r_2 = -2$.

Generell løsn. $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$

$y'(x) = C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x}$

$1 = y(0) = C_1 + C_2$

$0 = y'(0) = C_1 - 2C_2 \Rightarrow C_1 = 2C_2$

$3C_2 = 1$, $C_2 = 1/3$, $C_1 = 2/3$

$y(x) = \frac{1}{3} e^x + \frac{2}{3} e^{-2x}$

Tilfellet med to like røtter.

Anta at roten er r. Da vil $c \cdot e^{rx}$ være løsning for alle c.

I dette tilfellet er alle løsninger på formen $y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$

Flott! Da kan vi tilpasse startverdier.

Eks. $y'' - 4y' + 4y = 0$

$z^2 - 4z + 4 = 0$

Dobbel rot $r = 2$.

Da er generell løsn.

$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$

To kompleks konjugerte røtter

$z^2 + pz + q = 0 \quad , \quad p, q \in \mathbb{R}$

gir ikke vilkårlige komplekse røtter, de må være konjugerte.

Anta at røttene er $r = a + bi$, $\bar{r} = a - bi$

Vet at $y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 e^{\bar{r}x}$

er løsning uansett hva C_1 og C_2 er.

Vi velger $C_2 = \bar{C_1}$, $C = C_1$

$$y(x) = C e^{rx} + \bar{C} e^{\bar{r}x}$$

$$y(x) = C e^{rx} + \bar{C} e^{\bar{r}x}, \qquad r = a + ib, \quad \bar{r} = a - ib$$

$$C = A + iB, \quad D = A - iB$$

$$= (A + iB) e^{(a+ib)x} + (A - iB) e^{(a-ib)x}$$

$$= (A + iB) e^{ax} \cdot e^{ibx} + (A - iB) e^{ax} \cdot e^{-ibx}$$

$$= e^{ax}\big((A + iB)(\cos bx + i \sin bx) + (A - iB)(\cos bx - i \sin bx)\big) \qquad e^{ibx} = \cos bx + i \sin bx$$

$$= e^{ax}(2A \cos bx + 2Bi^2 \sin bx)$$

$$= e^{ax}(2A \cos bx - 2B \sin bx)$$

$$= e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Eks. $y'' + 2y' + 4y = 0$

$$z^2 + 2z + 4 = 0$$

$$z = -1 \pm \sqrt{1 - 4} = -1 \pm \sqrt{-3} = 1 \pm i\sqrt{3} = a \pm ib$$

$$y(x) = e^{x}(C_1 \cos(\sqrt{3}x) + C_2 \sin(\sqrt{3}x))$$

Inhomogene ligninger

Hvordan kan vi løse ligninger på formen

$$(\#) \quad y'' + py' + qy = f(x)$$

<u>Lemma</u> Anta y_p er én løsning av $(\#)$. Da er enhver annen løsning gitt ved $y = y_p + y_h$ der y_h er en løsning av den homogene ligningen

$$y'' + py' + qy = 0$$

Hvordan finne en løsning

av $y'' + py' + qy = f(x)$?

Prøv med en løsning på samme form som høyre siden.

<u>Eks</u> $y'' + y' - 2y = 2x$

Prøver med $y_p(x) = Ax + B$

Merk $y'(x) = A$, $y''(x) = 0$

Innsatt

$$2x = y_p'' + y_p' - 2y_p = 0 + A - 2Ax - 2B$$
$$= -2Ax + A - 2B$$

Må ha like koeffisienter for alle x.

$2 = -2A$, $A = -1$

$0 = A - 2B$, $B = A/2 = -1/2$

Dermed er $y_p(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

i) Polynom

ii) $a^x P(x)$

iii) Trigometri