Oversikt over MAT-INF 1100

1. Tall.
   a) Heltall; induksjon og binomialteoremet
   b) Reelle tall: rasjonale og irrasjonale
      kompletthet.
   c) Tall på datamaskin
      i) Representasjon – to-tall systemet
      ii) Representasjon på datamaskin
          avrundingsfeil – kansellering

2. Differensligninger.
   a) Første- og andreordens homogene
   b) Inhomogene (første og andreorden)
   c) Simulering av differensligninger
      effekt av avrundingsfeil.

3. Taylors formel med restledd
4. Interpolasjon med polynomer (Newton-formen)
5. a) Numerisk derivasjon, - 4 metoder
b) Numerisk integrasjon - 3 metoder
6. Løsning av differensial ligninger
a) Eulers metode
b) Eulers midtpkt metode
c) Systemer av ligninger, omskriving til første orden
d) Løsning med formel
Lineære første orden, separable
Andre orden med konstante koeff, lineære
(homogene og inhomogene)

7. Feilanalyse for numerisk integrasjon, derivasjon og løsning av diff.lign.
Anvendelse av Taylors formel med restledd.
Avrundingsfeil.

8. Numerisk løsning av ligninger
Halveringsmetoden, Newtons metode, sekantmetoden.

9. Kompresjon

To måter å løse en ligning:

a) Med formel

b) Med algoritme som finner en numerisk tilnærming

Gjelder ligninger, integraler, differensialligning. differensligninger, derivasjon.

Eksamen 2013, nr. 4 i del 2.

Vi har ligningen $x' = e^{-x}$, $x(0) = 1$

a) Finn en formel for løsningen og skisser denne i et plott.

Ligningen er separabel siden den kan skrives $\frac{x'}{e^{-x}} = 1$, $e^{x} \cdot x' = 1$, $x(t)$

Strategi: integrasjon på begge sider.

$\int 1\, dt = t + C$

$\int e^{x} \cdot x'\, dt = \int e^{x} dx = e^{x}$

Altså er

$$e^{x(t)} = t + C$$

Ta ln på begge sider

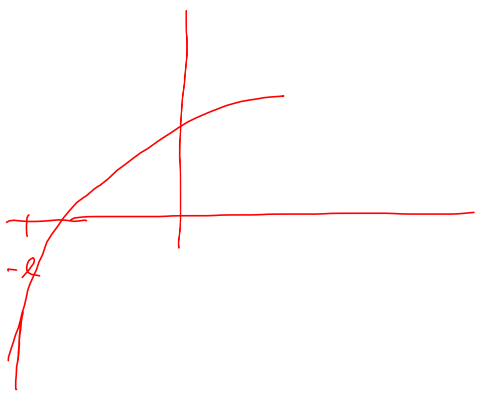
$$x(t) = \ln(t + c)$$

Startverdi $x(0) = 1$

$1 = x(0) = \ln(0 + c)$, $1 = \ln c$, $c = e$

Endelig løsning

$$x(t) = \ln(t + e)$$



b) Finn en tilnærming til løsningen i $t=h$ ved å ta ett steg med Eulers metode.
Finn en øvre grense for feilen.

Euler: $x_{k+1} = x_k + h f(t_k, x_k)$, $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$

Her er $x' = e^{-x}$ så $f(t, x) = e^{-x}$

$x(0) = 1$, $t_0 = 0$, $x_0 = 1$

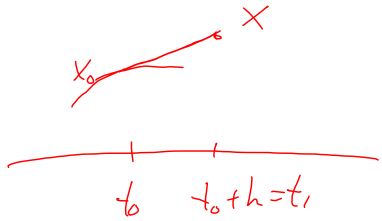
Første steg: $x_1 = x_0 + h f(t_0, x_0)$

$= 1 + h f(0, 1) = 1 + h e^{-1} = 1 + \frac{h}{e}$

Finn øvre grense for feilen.

Eulers metode svarer til å følge tangenten fra foregående løsningspunkt.

$x(t+h) = x(t) + h\,x'(t) + \frac{h^2}{2}x''(\xi)$



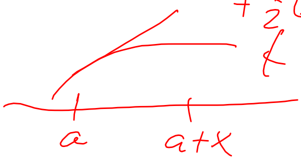
1. grad Taylor med restledd.

$x(t_0+h) = x(t_0) + h\,x'(t_0) + \frac{h^2}{2}x''(\xi)$

$f(a+x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(\xi)$

$t_0 = 0$

$x(h) = x(0) + h\,x'(0) + \frac{h^2}{2}x''(\xi)$



x_1

$= 1 + h e^{-1} + \frac{h^2}{2}x''(\xi) \quad \xi \in (0,h)$

Feilen er $R_1(h) = \frac{h^2}{2}x''(\xi)$

Problem: Vi kjenner ikke $x(t)$, bare $x'(t)$.

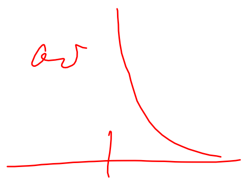
Husk $x' = e^{-x}$. Vi deriverer ligningen

$x'' = -e^{-x}\cdot x' = -e^{-x}e^{-x} = -(e^{-x})^2$

Siden $x' = e^{-x}$ alltid er positiv så er $x(t)$ voksende. ~~Men dermed er på samme måte $x''(t)$ avtagende.~~

Husk at $x(0) = 1$, $\xi \in (0,h)$. Dessuten

$x''(t) = -(e^{-x(t)})^2$, så $x''(t)$ er av



$|R_1(h)| = \left|\frac{h^2}{2}x''(\xi)\right|$

$= \frac{h^2}{2}\left|-(e^{-x(\xi)})^2\right| = \frac{h^2}{2}\left|e^{-2x(\xi)}\right| \leq \frac{h^2}{2}e^{-2x(0)}$

$= \frac{h^2}{2}e^{-2}$

$x(t) = \ln(t+e)$

Tilnærming $x_1 = 1 + \frac{h}{e}$

$|x(h) - x_1| = |\ln(h+e) - (1+\frac{h}{e})|$

Finn øvre grense for høyre side.