# Løsning av lineære diff ligning.

Ex. $y' + \frac{1}{x} y = \sin x$ på intervallet $(0, \infty)$

Finn antiderivert. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$

Multipliser med $e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$ på begge sider.

Får $xy' + y = x \sin x$

Integrer på begge sider:

$$(xy)' = x \sin x$$

$$xy = \int x \sin x \, dx = -x\cos x + \sin x + C$$

Altså er $y(x) = -\cos x + \frac{\sin x}{x} + \frac{C}{x}$

Anta at vi skal ha løsningen slik at

$y(\pi) = 1$

$$1 = y(\pi) = -\cos \pi + \frac{\sin \pi}{\pi} + \frac{C}{\pi}$$

$$= -(-1) + 0 + \frac{C}{\pi} = 1 + \frac{C}{\pi}$$

$\frac{C}{\pi} = 0$ så $C = 0$

Endelig løsning $y(x) = -\cos x + \frac{\sin x}{x}$.

# Separable ligninger.

Disse er på formen $q(y)\,y' = p(x)$

Eks. $e^{-x}\, y\, y' = -1$

Kan omformes til $y\,y' = -e^{x}$

Integrerer på begge sider:

$$\int y(x)\,y'(x)\,dx = \frac{1}{2}y(x)^2 = \int -e^{x}\,dx = -e^{x} + C$$

Sett $u = y(x)$. $du = y'(x)dx$

$$\int y(x)\,y'(x)\,dx$$
$$= \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}y(x)^2$$

$$y(x) = \pm\sqrt{2(C - e^{x})}$$

Startverdi: $y(0) = 4$

$$4 = y(0) = \pm\sqrt{2C - 2e^{0}} = \pm\sqrt{2C - 2}$$

Må ha $+$.

$$4 = \sqrt{2C - 2}\ ,\ 16 = 2C - 2\ ,\ 2C = 18\ ,\ C = 9$$

$$y(x) = \sqrt{18 - 2e^{x}}\ .$$

Gir bare mening når $18 - 2e^{x} \geq 0$

$$2e^{x} \leq 18$$
$$e^{x} \leq 9$$
$$x \leq \ln 9.$$

Andreordens ligninger (lineære)
med konstante koeff.

Generelle lineære, andreordens ligninger:

$$y'' + P(x)\,y' + q(x)\,y = g(x)$$

Konstante koeff.

$$y'' + p\,y' + q\,y = g(x) \quad , \quad p, q \in \mathbb{R}.$$

Ser først på homogene ligninger, $g(x) = 0$

Ligning: (*) $y'' + py' + qy = 0$ , $p, q \in \mathbb{R}$.

Lemma 10.5.1 Anta at $y_1$ og $y_2$ er to løsninger av (*). Da er også

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

løsning av (*) for alle valg av $C_1$ og $C_2$.

Hvordan finne en løsning?

Ligningen $y' + by = 0$ , $b \in \mathbb{R}$

har løsning $y(x) = e^{-bx}$.

Vi prøver med $y(x) = e^{rx}$ som løsning av $y'' + py' + qy = 0$ der $r$ er ukjent

Prøver med $y(x) = e^{rx}$, $y'(x) = re^{rx}$

Innsatt: $y''(x) = r^2 e^{rx}$

$$0 = y'' + Py' + qy$$
$$= r^2 e^{rx} + Pr\,e^{rx} + q\,e^{rx}$$
$$= e^{rx}(r^2 + Pr + q)$$

Altså må $r$ løse $r^2 + Pr + q = 0$

Generelt to løsninger $r_1$ og $r_2$

Da vil $y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ være den generelle løsningen av $y'' + Py' + qy = 0$.

Eksempel: $y'' + y' - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

Karakteristisk ligning: $r^2 + r - 2 = 0$

$$r = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}}$$
$$= -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$r_2 = -2$, $r_1 = 1$

Generell løsning $y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$

Startverdier

$y'(x) = C_1 e^{x} - 2C_2 e^{-2x}$

I $1 = y(0) = C_1 + C_2$

II $0 = y'(0) = C_1 - 2C_2$

I − II: $1 = 3C_2$, $C_2 = 1/3$, $C_1 = 1 - C_2 = 2/3$

$$y(x) = \frac{2}{3} e^{x} + \frac{1}{3} e^{-2x}$$

NB! Vi får frem alle løsninger på denne måten!

Hva må vi nå gjøre?

Se på tilfellene

1. $r_1 \neq r_2$ , $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ ✓

2. $r_1 = r_2$ , $r_1 \in \mathbb{R}$

3. $r_2 = \overline{r_1}$ , $r_1 \in \mathbb{C}$

Til fille 2. Da er $e^{r_1 x} = e^{r_2 x}$ men vi vil ha to løsninger: Hvis $r_1 = r_2 = r$ er også $x e^{rx}$ en løsning så generell løsning blir

$$y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$$
$$= (C_1 + C_2 x) e^{rx}.$$

Tilfelle 3: To kompleks konjugerte løsninger.

$y'' + py' + qy = 0$ gir kar. ligning

$$r^2 + pr + q = 0$$

som har løsninger $r$ og $\bar{r}$

$r = a + ib$, $\bar{r} = a - ib$

$$e^{rx} = e^{(a+ib)x} = e^{ax} \cdot e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)$$

$$e^{\bar{r}x} = \qquad = e^{ax}(\cos bx - i\sin bx)$$

Generell løsning:

$$y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 e^{\bar{r}x}$$

Vi må ha $\overline{C_2} = C_1$ for å få reell løsning.

Sjekk: $C_1 = A + iB$

$$y(x) = (A+iB)e^{ax}(\cos bx + i\sin bx) + (A - iB)e^{ax}(\cos bx - i\sin bx)$$

$$= e^{ax}\left[2A\cos bx + 2i^2 B\sin bx\right]$$

$$= e^{ax}(2A\cos bx - 2B\sin bx)$$

$$= e^{ax}(E\cos bx + F\sin bx), \quad r = a + ib$$