Homogene, lineære andreordens differensialligninger

$$y'' + p y' + q y = 0 \quad , \quad p, q \in \mathbb{R}$$

Karakteristisk ligning:

(*) $r^2 + pr + q = 0$

La r_1 og r_2 være de to løsningene av (*)

Da er løsningen til $y'' + py' + qy = 0$:

i) $r_1 \neq r_2$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

ii) Hvis $r = r_1 = r_2$, $r \in \mathbb{R}$:

$$y(x) = e^{rx}(C_1 + C_2 x)$$

iii) Hvis $r_2 = \overline{r_1} = a + ib$:

$$y(x) = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$$

Eks. $y'' + 2y' + 4y = 0$

Kar. lign. $r^2 + 2r + 4 = 0$

$$r = -1 \pm \sqrt{1 - 4} = -1 \pm \sqrt{-3}$$

$$r_1 = -1 + i\sqrt{3}, \quad r_2 = -1 - i\sqrt{3}$$

$$= a + ib, \quad a = -1, \quad b = \sqrt{3}$$

$$y(x) = e^{-x}(C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2 \sin\sqrt{3}x)$$

Anta $y(0) = 0$, $y'(0) = \sqrt{3}$

$$0 = y(0) = e^0(C_1 \overset{1}{\cos 0} + C_2 \overset{=0}{\sin 0})$$

$$= C_1$$

$$y(x) = e^{-x} C_2 \sin(\sqrt{3}x)$$

$$y'(x) = -e^{-x} C_2 \sin(\sqrt{3}x) + e^{-x} C_2 \sqrt{3} \cos(\sqrt{3}x)$$

$$\sqrt{3} = y'(0) = 0 + e^0 C_2 \sqrt{3} \underbrace{\cos 0}_{=1}$$

$$= C_2\sqrt{3}$$

Så $C_2 = 1$

Endelig løsning $y(x) = e^{-x} \sin(\sqrt{3}x)$

Annenordens inhomogene ligninger

Hvordan løser vi

(*) $y'' + py' + qy = f(x)$, $p, q \in \mathbb{R}$?

Lemma 10.6.1 Anta at y_p er en løsning av (*). Da er enhver annen løsning gitt ved $y = y_p + y_h$ der y_h er en løsning av den homogene ligningen $y'' + py' + qy = 0$.

Hvordan finner vi y_p?
Partikulærløsningen y_p er "på samme form" som høyresiden $f(x)$

Ex. $y'' + y' - 2y = 2x$

y_p på samme form som $2x$, det vil si
$y_p(x) = Ax + B$, $A, B \in \mathbb{R}$ som må bestemmes.
$y_p'(x) = A$, $y_p''(x) = 0$

Innsatt: $2x = y'' + y' - 2y = 0 + A - 2(Ax + B)$
$= -2Ax + A - 2B$

Vi har bare likhet for alle $x \in \mathbb{R}$ hvis koeffisientene er like

$2 = -2A$, $0 = A - 2B$

$A = -1$, $2B = A$, $B = A/2 = -1/2$

$y_p(x) = Ax + B = -x - \frac{1}{2}$

Homogen løsning:
Ser på $y'' + y' - 2y = 0$

Kar. ligning. $r^2 + r - 2 = 0$

$r = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$
$= -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$

$r_1 = -2$, $r_2 = 1$

$y_h(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}$

Generell løsning av $y'' + y' - 2y = 2x$

$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = -x - \frac{1}{2} + C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}$.

Til slutt kan vi legge til startverdier
$y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. Da kan C_1 og C_2 bestemmes.