Inhomogene ligninger.

$$y'' + py' + qy = f(x).$$

i) $f(x)$ er et polynom av grad n.

Prøv med $y_p = q(x)$ der q er et vilkårlig polynom av grad n.

Hvis det ikke går, øk graden på q med 1.

ii) $f(x) = a^x P(x)$, P - polynom av grad n, $a \in \mathbb{R}$.

Prøv med $y_p = a^x q(x)$ der q er et vilkårlig polynom av grad n.

iii) $f(x) = a^x (A \cos bx + B \sin bx)$, $a, b \in \mathbb{R}$

Prøv med $y_p = a^x (C \cos bx + D \sin bx)$ der C, D skal bestemmes.

Separable differensialligninger.

Vi har en dyrepopulasjon som vokser med vekstrate r, dvs. $y' = r y$,

da er $y(t) = C e^{rt}$

Ikke realistisk modell, ingen begrensning på antall individer.

Mer realistisk: Max N individer.

En annen modell:

$$y'(t) = r \cdot y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{N}\right)$$

Vi ser at hvis $y(t) << N$ så er

$y'(t) \approx r \cdot y(t)$ - eksponensiell vekst.

Hvis $y(t) > N$ er $y'(t) < 0$ så antall individer vil avta.

Hvis $y(t) = N$ er $y'(t) = 0$ så antall individer blir konstant.

Løse ligningen: $y' = r \cdot y\left(1 - \frac{y}{N}\right)$

Kan skrives som:

$$\frac{y'}{y(1 - y/N)} = r$$

$(g(y)\,y' = p(x))$

$g(y) = \frac{1}{y(1 - y/N)}$

$p(x) = r$ (konstant)

Løser ved integrasjon.

$$\int \frac{y'}{y(1 - y/N)}\,dt = \int r\,dt = rt + C$$

$$= \int \frac{dy}{y(1 - y/N)} = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{N-y}\right) dy$$

$$= \ln|y| - \ln|N-y|$$

$$= \ln\left|\frac{y}{N-y}\right|$$

Satt sammen.

$$\ln\left|\frac{y}{N-y}\right| = r \cdot t + C$$

Eksponensialfunksjon på begge sider

$$e^{\ln\left|\frac{y}{N-y}\right|} = \left|\frac{y}{N-y}\right| = e^{r \cdot t + C} = e^{C} \cdot e^{rt} = D e^{rt}, \quad D > 0$$

eller $\frac{y}{N-y} = D e^{rt}$, $D \neq 0$

Løs m.h.p. y

$$y(t) = \frac{N}{1 + De^{-rt}} \rightarrow N \quad \text{når } t \rightarrow \infty$$