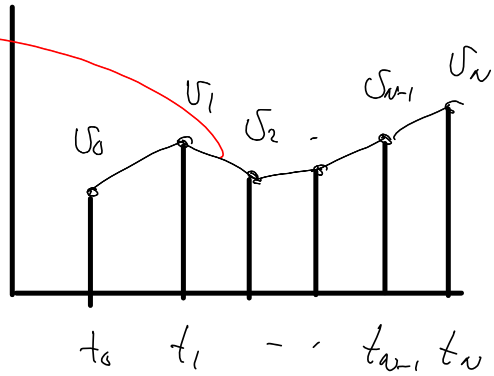
Numerisk derivasjon, kap 11 i Komp.

Anta at vi har data $(t_i, v_i)_{i=0}^{N}$ og vi ønsker å finne den deriverte.



Tilnærmet derivert:

$$\frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \quad \text{når } t \in [t_1, t_2]$$

Det fins andre metoder basert på polynomer av høyere grad.

Hvordan vurderer vi kvaliteten på en metode?

Et rimelig kriterium: Hvor fort avtar feilen når avstanden mellom punktene avtar?

Dette kan vi enklest gjøre om vi antar at dataene er hentet fra en funksjon.

$v_i = f(t_i)$.

Tilnærming $\dfrac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}$, $a = t_{i-1}$, $t_i = a+h$

$$= \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Den deriverte til f er gitt ved

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Numerisk derivasjon: Vi bruker tilnærmingen

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \quad h>0$$

Hvor stor er feilen? $\frac{(x-a)^2}{2} f''(\xi_h)$

$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) +$

Taylor: $f(a+h) = f(a) + h f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(\xi_h)$

$$f(a+h) - f(a) = h f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(\xi_h) \qquad \xi_h \in (a, a+h)$$

$$f'(a) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi_h)$$ Feil.

Ex. $f(x) = \sin x$, $a = 0.5$, $f'(x) = \cos x$.

Prøver med $h = 0.1, 0.01, 0.001, \ldots$

h	Feil
10^{-1}	$2.5 \cdot 10^{-2}$
10^{-2}	$2.4 \cdot 10^{-3}$
10^{-3}	$2.4 \cdot 10^{-4}$
10^{-4}	$2.4 \cdot 10^{-5}$
$\vdots$	
10^{-6}	$2.4 \cdot 10^{-7}$

Som forventet!

$$f'(a) - \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = -\frac{h}{2} f''(\xi_h), \quad \xi_h \in (a, a+h)$$

$$\approx -\frac{h}{2} f''(a)$$

I eksemplet er $f(x) = \sin x$, $f''(x) = -\sin x$.
$a = 0.5$

Feil $\approx +\frac{h}{2} \sin 0.5$

Eksempel fortsatt:

h	feil
10^{-7}	$2.5 \cdot 10^{-8}$
10^{-8}	$-2.9 \cdot 10^{-10}$
10^{-9}	$-2.9 \cdot 10^{-10}$
10^{-11}	$1.2 \cdot 10^{-6}$
10^{-17}	$8.8 \cdot 10^{-1}$

Forklaring:

Når vi skal regne ut $f(a)$ så får vi vanligvis ikke denne verdien men det nærmeste flyttallet (maskintallet) $\overline{f(a)}$

Altså er

$$\frac{\overline{f(a)} - f(a)}{f(a)} = \varepsilon_1$$

, $|\varepsilon_1| \approx 6 \cdot 10^{-17}$

max $|\varepsilon_1|$ kaller vi ε^*

$\varepsilon^* \sim 10^{-16}$

På samme måte

$$\frac{\overline{f(a+h)} - f(a+h)}{f(a+h)} = \varepsilon_2$$

der $\overline{f(a+h)}$ er nærmeste maskintall til $f(a+h)$

~~Innsatt i tilnærming til derivert.~~

Med andre ord:

$$\overline{f(a)} = f(a)(1+\varepsilon_1) \quad , \quad \overline{f(a+h)} = f(a+h)(1+\varepsilon_2)$$

Innsatt i feilen:

$$f'(a) - \frac{\overline{f(a+h)} - \overline{f(a)}}{h} = f'(a) - \frac{(f(a+h)(1+\varepsilon_2) - f(a)(1+\varepsilon_1))}{h}$$

$$= f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{f(a+h)\varepsilon_2 - f(a)\varepsilon_1}{h}$$

$$= -\frac{h}{2} f''(\xi_h) - \frac{f(a+h)\varepsilon_2 - f(a)\varepsilon_1}{h}$$

Pyntet

$$\left| f'(a) - \frac{\overline{f(a+h)} - \overline{f(a)}}{h} \right| \approx \frac{h}{2}|f''(a)| + \frac{2\varepsilon(h)}{h} \cdot |f(a)|$$

h liten.

$E(h)$

$E'(h) = 0$