Forrige gang: Taylor polynomer

I dag: interpolasjon (kap 9.2 i kompendiet)

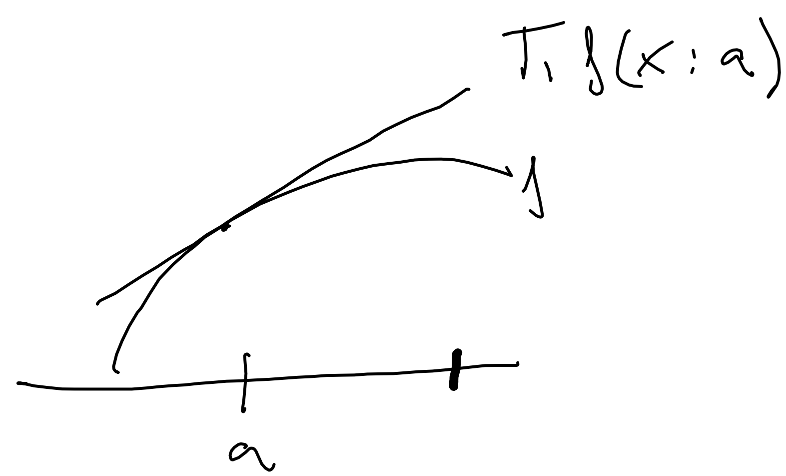
Taylor polynomer

Gitt en funksjon f. Taylorpolynomet av grad n om a

$$T_n f(x:a) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) \dots \frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a)$$

Feil/Restledd

$$R_n f(x:a) = \frac{1}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c) \qquad c \in (a,x)$$



$$\Rightarrow \quad f(x) = T_n f(x:a) + R_n f(x:a)$$

Forrige gang: Eks 11.2.5 i Kalkulus

Eks. 2. Beregn $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ med feil mindre enn 10^{-4}.

Erstatt $\sin x$ med sitt Taylorpolynom av grad $2n$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx \approx \int_0^1 \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right)}{x}\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!}\right)dx$$

Hvor mange ledd trenger vi for feil < 10^{-4}?

Må se på restleddet R_{2n}

Se på resteleddet: sin x = T_{2n} sin x + R_{2n} sin x

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}\, x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$f = \sin x$

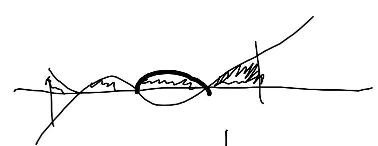
$$+ \frac{f^{(2n+1)}(c)}{(2n+1)!}(x-0)^{2n+1}$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{T_2 \sin x + R_2 \sin x}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{T_2 \sin x}{x}\,dx$$

$$+ \int_0^1 \frac{R_{2n} \sin x}{x}\,dx \leq 10^{-4}$$

Finn n!

$$R_{2n} \sin x = \frac{f^{(2n+1)}(c)}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} \qquad c \in (0,x)$$



$$|R_{2n} \sin x| \leq \frac{1}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$$

"trekantulikhet"

$$\left|\int_0^1 \frac{R_{2n} \sin x}{x}\,dx\right| \leq \int_0^1 \left|\frac{R_{2n} \sin x}{x}\right| dx \leq \frac{1}{(2n+1)!}\int_0^1 \left|\frac{\cancel{x}^{2n+1}}{\cancel{x}}\right| dx$$

$$\leq \frac{1}{(2n+1)!}\int_0^1 x^{2n}\,dx = \frac{1}{(2n+1)!\,(2n+1)}$$

Vi ønsker feil $\leq 10^{-4}$. Velg n slik at

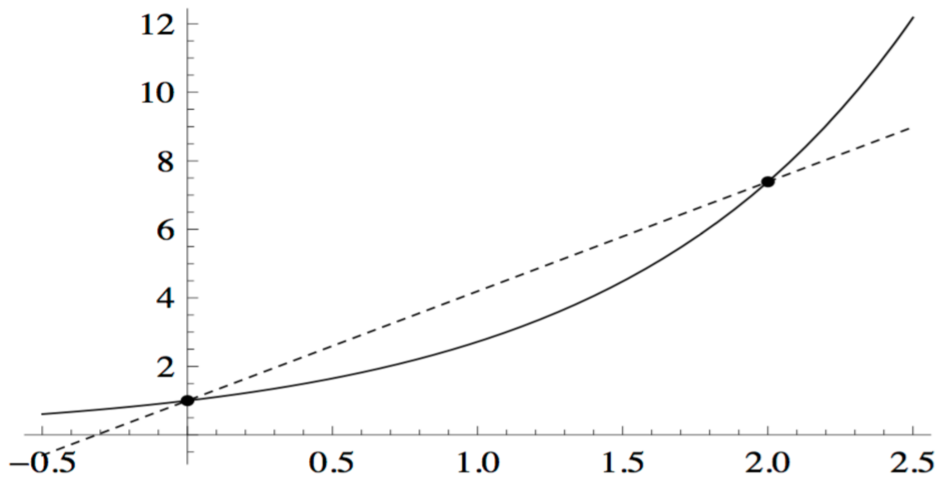
$$\frac{1}{(2n+1)!\,(2n+1)} \leq 10^{-4}$$

Dette gjelder for $n \geq 3$

Dette betyr at vi må bruke Taylor polynom av grad minst 6 for å få en feil $\leq 10^{-4}$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx \approx \int_0^1 \frac{\cancel{x} - \frac{x^{\cancel{3}\,2}}{6} + \frac{x^{\cancel{5}\,4}}{5!}}{\cancel{x}}\,dx = \int_0^1 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{5!}\,dx \approx 0.9461$$

Interpolasjon: 9.2 i kompendiet



Gitt en funksjon f. Finn et polynom på formen

$$p(x) = a + b\,x$$

slik at $p(0) = 1$ og $p(2) = 7$

Bestem a og b:

$$p(0) = a + b \cdot 0 = a = 1 \Rightarrow a = 1$$

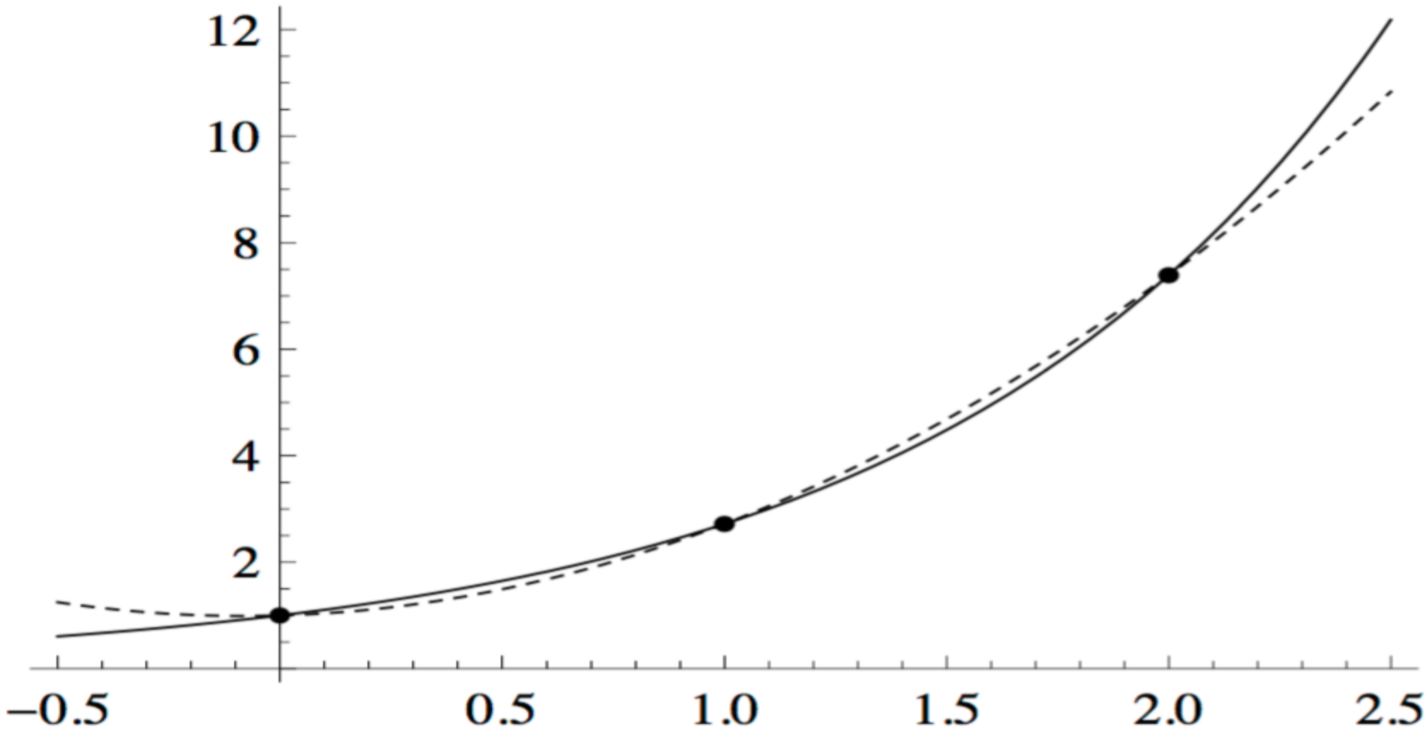
$$p(2) = a + b \cdot 2 = 7 \Rightarrow 1 + 2b = 7$$

$$b = 3$$

$\Rightarrow p(x) = 1 + 3x$ er en tilnærming til f

Vi sier at $p(x)$ interpolerer $f(x)$ i 0 og 2

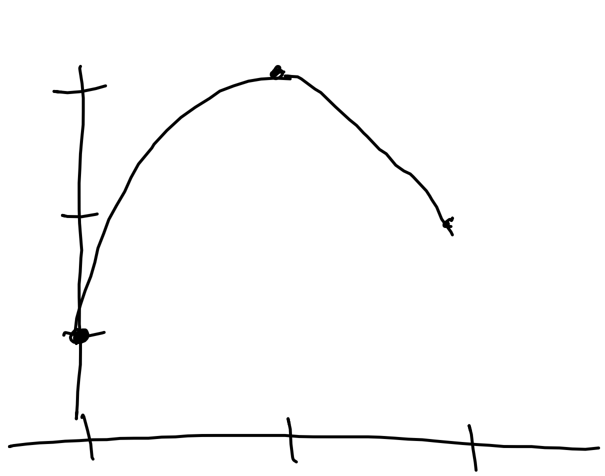
Interpolasjon med polyonom grad 2



$p(x)=a + b\,x + c\,x^2$

Finn a, b, c s.a. $p(0)=1$, $p(1)=3$ og $p(2)=7$

Eks. 9.12: Gitt punktene $(0,1)$, $(1,3)$ og $(2,2)$



Vi prøver å finne annengrads-polynom

$$\boxed{p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 \cdot x^2}$$ slik at

$p(0) = 1$, $p(1) = 3$ og $p(2) = 2$

$p(0) = c_0 = 1 \Rightarrow c_0 = 1$

$$\begin{cases} p(1) = c_0 + c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1^2 = c_0 + c_1 + c_2 = 3 \\ p(2) = c_0 + 2c_1 + 4c_2 = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow c_1 = 7/2$ og $c_2 = -\frac{3}{2}$

$$\Rightarrow p(x) = 1 + \frac{7}{2}x - \frac{3}{2}x^2$$

Samme eksempel, men skriver $p(x)$ på en annen måte:

$$\boxed{p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x(x-1)}$$

$$1 = p(0) = c_0 \Rightarrow c_0 = 1$$

$$3 = p(1) = c_0 + c_1 \Rightarrow c_1 = 2$$

$$2 = p(2) = c_0 + 2c_1 + 2c_2 \Rightarrow c_2 = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{p(x) = 1 + 2x - \frac{3}{2}x(x-1)}$$

Newton form

Anta at vi skal finne et polynom p av grad n slik $p(x_0)=y_0$, $p(x_1)=y_1$, $p(x_2)=y_2$ $\cdots$, $p(x_n)=y_n$

Med andre ord: $p(x)$ skal interpolere punktene

$$(x_0,y_0),\ (x_1,y_1)\ \cdots,\ (x_n,y_n)$$

Da lønner det seg å skrive $p(x)$ på formen

$$p(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \cdots + c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

Gjør at vi kan finne $c_0, \cdots, c_n$ effektivt

Eks Krever $p(x_0)=y_0$ $p(x_1)=y_1$ og $p(x_2)=y_2$

$$y_0 = p(x_0) = c_0 \Rightarrow c_0 = y_0$$

$$y_1 = p(x_1) = c_0 + c_1(x_1-x_0) \Rightarrow c_1 = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$$

$$\underline{y_2} = p(x_2) = \underline{c_0} + \underline{c_1}(x_2-x_0) + c_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$

Kan finne c_2

Generelt

Hvis vi har $n+1$ punkter

$(x_0, y_0) \dots (x_n, y_n)$ med $x_i < x_{i+1}$

kan vi finne et polynom $p(x)$ av grad n slik at

$p(x_i) = y_i$ for $i = 0, \dots, n$

Teorem: Det finnes en entydig slik p så

lenge $x_i \neq x_j$ for $i \neq j$

Det lønner seg å bruke Newton-form