Numerisk derivasjon.

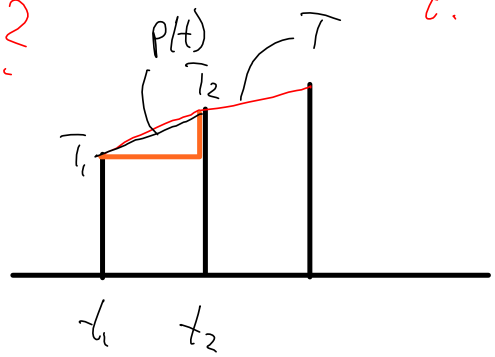
Hvis f er en funksjon er den deriverte i a gitt ved

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

Hvis $f(x) = x^n$ så er $f'(a) = n a^{n-1}$

Vi måler temperaturen hvert minutt.
Da er det en underliggende funksjon $T(t)$
som gir temperaturen $T(t)$ for hvert tidspunkt t.

Kan vi derivere $T(t)$?



$$p(t) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{t_2 - t_1}(t - t_1)$$

$$p'(t) = \frac{T_2 - T_1}{t_2 - t_1}$$

$$p'(t_1) \approx T'(t_1) \qquad T'(t_1) \approx \frac{T_2 - T_1}{t_2 - t_1}$$

$$\parallel$$

$$\frac{T_2 - T_1}{t_2 - t_1}$$

Mer detaljer

Hvis f er gitt og vi bruker tilnærmingen

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad h > 0$$

kan vi da si noe om kvaliteten på tilnærmingen?

Ved hjelp av Taylor: $x = a+h$, $h = x - a$, $(x-a)^2$

$$f(\overset{x}{a+h}) = f(a) + \overset{(x-a)}{h} f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(\xi_h), \quad \xi_h \in \cancel{(a,h)}\ (a, \overset{x}{a+h})$$

Da er

$$f(a+h) - f(a) = h f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(\xi_h)$$

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi_h)$$

$$f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = -\frac{h}{2} f''(\xi_h)$$

Feilen er proporsjonal med h: Hvis vi reduserer h med en faktor på 10 vil feilen bli redusert med en faktor på 10.

Strategi for å utlede
numeriske derivasjonsformler.

Nok om vi har gitt noen måledata
(funksjonsverdier) fra en funksjon f.
og et punkt a (der vi ønsker å finne
den deriverte)

1. Plukk ut noen funksjonsverdier
rundt a, $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$

2. Finn polynomet P_n som interpolerer
f i $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$

3. Bruk tilnærmingen $f'(a) \approx P_n'(a)$.

Eksempel: $f'(a) \approx \dfrac{f(a-2h) - 8f(a-h) + 8f(a+h) - f(a+2h)}{12h}$

3. grads polynom

Eksempel: $f''(a) \approx \dfrac{f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)}{h^2}$

basert på interpolasjon med 2. grads polynom
i $a-h, a, a+h$.