Følger og differensligninger

En følge er en sekvens av tall

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots = \{a_n\}$$

Eks Penger i banken.

Anta at vi har 100 000 i banken til 2 % rente.

La x_n være beløp i banken etter n år.

$$x_0 = 100\,000, \qquad x_{n+1} = 1{,}02 \cdot x_n = x_n + 0{,}02 \cdot x_n$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ex. Fibonacci - følgen.

Anta at vi har et kaninpar som føder et par kaniner hver måned. Når kaninene er 2 måneder begynner de å føde par på samme måte. Hvor mange par er det etter ett år?

-1	0	1	2	3	4	5	6	7	--	12
1	1	2	3	5	8	13	21	34		377

Med ligning (x_n - antall par etter n måneder)

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \quad , \quad x_0 = 1$$

$$n = 1, 2, 3, 4 \ldots$$

Vi trenger to startverdier. $x_{-1} = 1$

Første ordens ligning.

$x_{n+1} = r\, x_n \quad , \qquad x_0 = a \quad , \quad n = 0, 1, 2 \ldots$

$n=0 \quad x_1 = r\, x_0 = r \cdot a$

$x_2 = r \cdot x_1 = r\,(r \cdot a) = r^2 a$

$x_3 = r \cdot x_2 = r\,(r^2 \cdot a) = r^3 a$

$\vdots$

$x_n = r^n \cdot a = r^n \cdot x_0$

Andre ordens ligning ($x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$
$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$)

Ser nå (#) $\boxed{x_{n+2} + b\,x_{n+1} + c\,x_n = 0 \ , \ b, c \in \mathbb{R}}$

Da er $x_{n+2} = -b\,x_{n+1} - c\,x_n$

så hvis vi kjenner x_0 og x_1 kan vi regne ut $x_2, x_3, x_4, \ldots$

Nå ønsker vi å finne en formel for x_n.

Observasjon. Hvis $x_0 = a_0$, $x_1 = a_1$ der a_0 og a_1 er gitt, er hele følgen bestemt.

<u>Lemma.</u> Anta at vi har to løsninger av (#), $\{y_n\}$ og $\{z_n\}$. Hvis C og D er vilkårlige tall så er $\{x_n\}$ også en løsning der $x_n = C\,y_n + D\,z_n$.

Hvordan finne den første løsningen?

Vi prøver med $x_n = r^n$, som for 1. ordens ligning.

Husk at ligningen er

$$x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = 0$$

Med $x_n = r^n$, $x_{n+1} = r^{n+1}$, $x_{n+2} = r^{n+2}$

$$\begin{aligned} 0 &= x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = \\ &= r^{n+2} + b r^{n+1} + c r^n \\ &= r^n (r^2 + b r + c) \end{aligned}$$

Dermed ser vi at om r^n skal være en løsning må r løse ligningen

$$r^2 + br + c = 0 \quad \text{(karakteristisk ligning)}.$$

Hvis det er to løsninger r_1 og r_2 vil

$$x_n = C r_1^n + D r_2^n$$

også være en løsning for alle mulige valg av C og D. (ref lemma).

Tre tilfeller.

i) To relle løsninger av kar. ligning.

ii) En reell løsning

iii) To komplekse konjugerte løsninger.

Eks: $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 4x_n = 0$, $\boxed{x_0 = 1, \quad x_1 = -2}$

Kar. lign. $r^2 - 5r + 4 = 0$

$$r = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$r_1 = 1$, $r_2 = 4$

Generell løsning er $x_n = C \cdot r_1^n + D \cdot r_2^n$

$= C \cdot 1^n + D \cdot 4^n$

$= C + D\,4^n$

$x_0 = 1$, $x_1 = -2$ gir

$1 = x_0 = C + D$

$-2 = x_1 = C + 4D$

I $C + D = 1$

II $C + 4D = -2$

I − II gir $3D = -3$

$D = -1$

$C = 2$

Endelig løsning $x_n = 2 - 4^n$

Tilfelle 2. En reell rot. r.

Da vil åpenbart r^n være en løsning.

Det viser seg at $n r^n$ også er en løsning i dette tilfellet. Generell løsning er altså

$$x_n = C r^n + D n \cdot r^n$$

Tilfelle 3. Tre komplekse konjugerte røtter

$r^2 + br + c = 0$ har de to $r, \bar{r}$

løsningene $r = -\frac{b}{2} + i\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}$

Generell løsning:

$$x_n = C r^n + D \bar{r}^n$$

For at dette skal bli reelt må $D = \bar{C}$

$$x_n = C r^n + \bar{C} \bar{r}^n$$

Anta at $r = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

$C = A + iB$, $D = A - iB (= \bar{C})$

$$x_n = (A + iB)(\rho e^{i\theta})^n + (A - iB)(\rho e^{-i\theta})^n$$

$$= (A+iB)\rho^n e^{in\theta} + (A - iB)\rho^n e^{-in\theta}$$

$$= (A+iB)\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

$$+ (A - iB)\rho^n(\cos n\theta - i\sin n\theta)$$

$$= \rho^n(2A\cos n\theta + 2i^2 B\sin n\theta)$$

$$= \rho^n(2A\cos n\theta - 2B\sin n\theta)$$

$$= \rho^n(F\cos n\theta + G\sin n\theta), \quad F, G \in \mathbb{R}$$

$r = \rho e^{i\theta}$