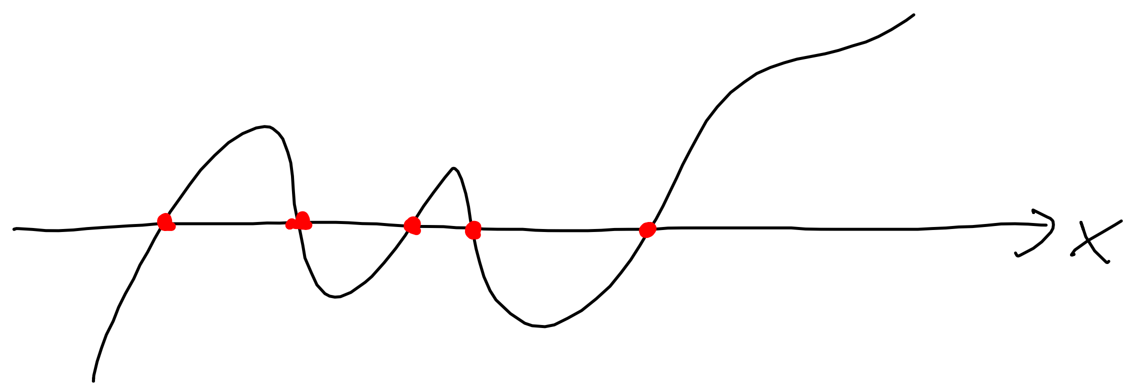
Forelesning 16.11.2015

Denne uken: løsning av ligninger (kap 10 i kompendiet)

Ligninger

$f(x) = 0$



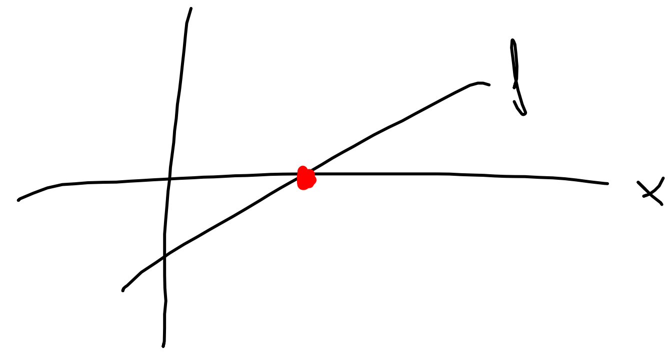
Hvordan løser man ligninger?

① Finn formel / oppskrift.
Funker kun i enkle tilfeller f.eks. lineære, kvadratiske

② Finn en numerisk tilnærming med ønsket nøyaktighet
Funker så og si alltid!

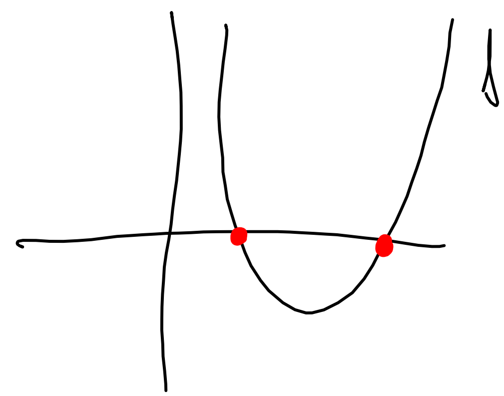
Eks: Lineære: $f(x) = ax + b = 0$

$$x = -\frac{b}{a}$$



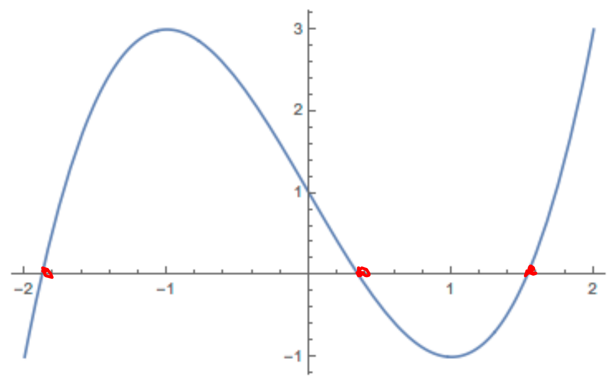
Kvadratiske: $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



Løsning av x^3-3x+1=0

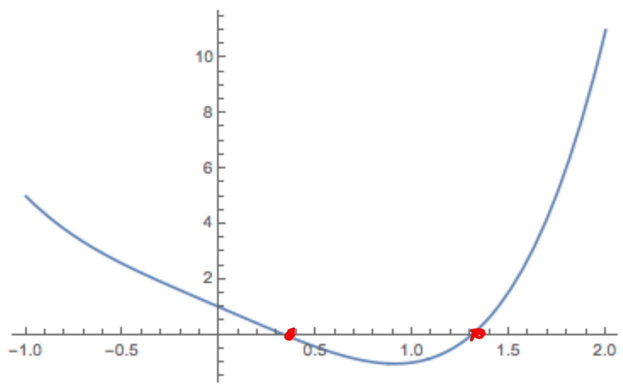
Plot[x^3 - 3 x + 1, {x, -2, 2}]



$$x = \frac{-20\sqrt[3]{\dfrac{3}{-9+\sqrt{12081}}}+\sqrt[3]{2\left(-9+\sqrt{12081}\right)}}{6^{2/3}}.$$

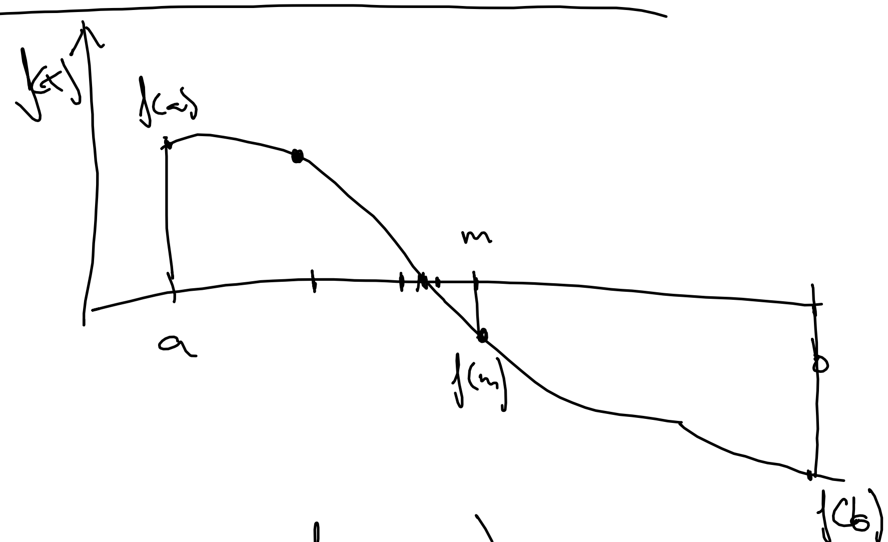
Løsning av x^4-3x+1=0

```
Plot[x^4 - 3 x + 1, {x, -1, 2}]
```



$$x=\frac{\sqrt{\sqrt[3]{81-\sqrt{5793}}+\sqrt[3]{81+\sqrt{5793}}}}{2\sqrt[6]{2}\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}\left(-\sqrt[3]{\frac{3}{2}\left(81-\sqrt{5793}\right)}-\sqrt[3]{\frac{3}{2}\left(81+\sqrt{5793}\right)}+\frac{18\sqrt[6]{2}\sqrt[3]{3}}{\sqrt{\sqrt[3]{81-\sqrt{5793}}+\sqrt[3]{81+\sqrt{5793}}}}\right)}$$

HALVERINGSMETODEN (BISECTION) (10.2)



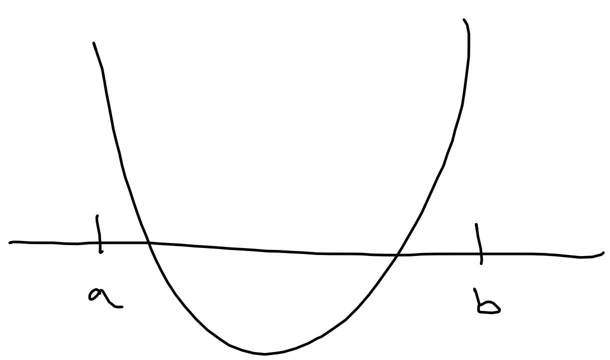
Thm 10.1: Hvis f er kontinuerlig på $[a,b]$ og har motsatt fortegn i a og b

$$f(a)\cdot f(b) < 0$$

så finnes det en $c \in (a,b)$ slik at $f(c) = 0$ (løsning av ligningen $f(x) = 0$)

Halveringsmetoden: Gjett på midtpunktet, da blir $[a,b]$ delt i to. Ett av disse må inneholde en løsning

$\Rightarrow$ kan fortsette prosessen



Avhenger av fornuftig valg av a,b

$$f(a)\cdot f(b) < 0$$

Fungerer ikke når f(a)*f(b)>0

Algoritme 10.2 (Halveringsmetoden)

$a_0 = a$; $b_0 = b$;

for $i = 1, 2, \ldots, N$

$m_{i-1} = \dfrac{a_{i-1} + b_{i-1}}{2}$

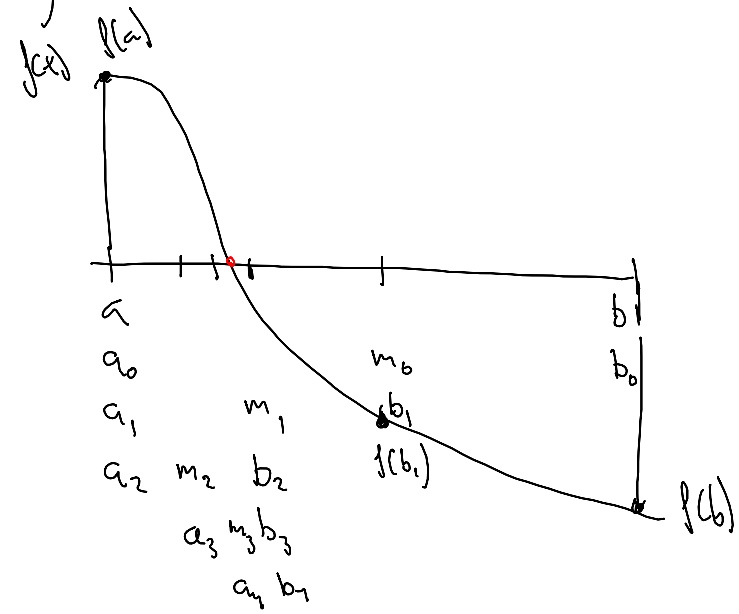
if $f(m_{i-1}) == 0$ hurra!!!

if $f(a_{i-1}) \cdot f(m_{i-1}) < 0$

$a_i = a_{i-1}$; $b_i = m_{i-1}$;

else

$a_i = m_{i-1}$; $b_i = b_{i-1}$

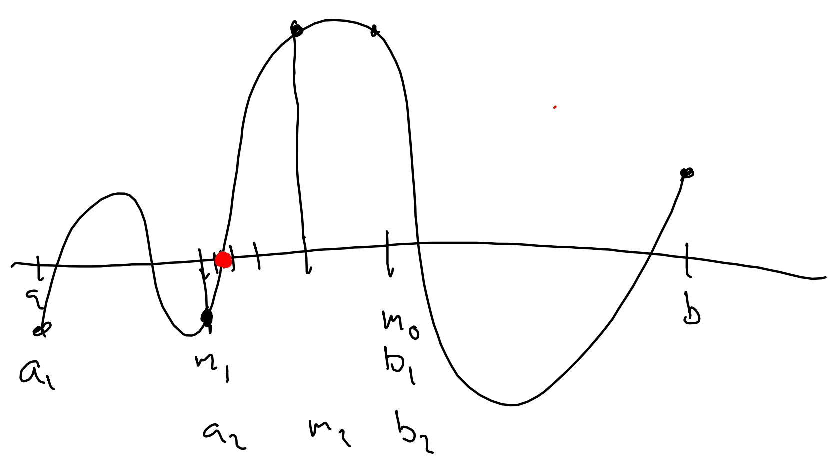


$m_N = \dfrac{a_N + b_N}{2}$ tilnærmet løsning

$\boxed{\text{Da er } f(m_N) \approx 0}$

Halveringsmetoden er bortimot idiotsikker

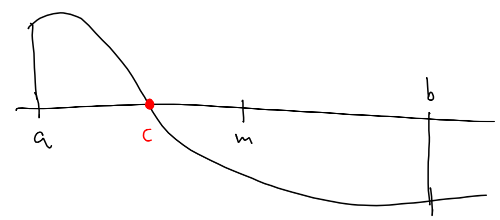
Men hva om det er flere løsninger i $[a,b]$?



Kan ikke forutsi hvilken løsning som finnes

Feil i Halveringsmetoden

Absolutt-Feilen i første steg:



$$|c-m| \le \frac{b-a}{2}$$

Etter i steg

$$|c-m_i| \le \frac{b-a}{2^{i+1}}$$

Hva med relativ feil?

$$\frac{|c-m_i|}{|c|} \le \frac{b-a}{2^{i+1}\cdot|c|} \approx \frac{b-a}{2^{i+1}|m_i|}$$

Kan kjøre halveringsmetoden slik:

while $\frac{b-a}{2^{i+1}|m_i|} > 10^{-10}$

halver intervall

$m_i =$

NB: problem om $m_i \approx 0$

$\Rightarrow$ isteden while $b-a > 10^{-10}\cdot|m_i|\cdot 2^{i+1}$

Fra stoff om flyttall: kan vise at antall korrekte bits i m_i øker med 1 pr iterasjon!

$\Rightarrow$ Full nøyaktighet etter $N = 24$ iterasjoner (32 bits flyttall)

$N = 54$ —"— (64 bits flyttall)

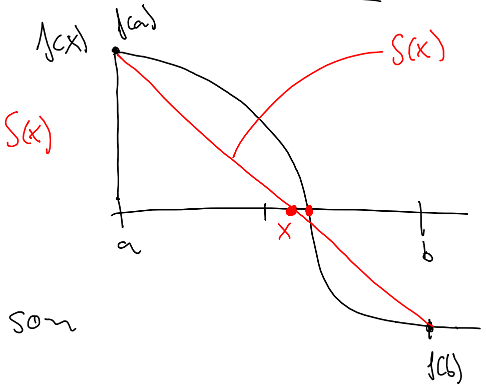
$|e_i| = |c-m_i|$. Har da at $\boxed{e_{i+1} \le K e_i^r}$ $r = 1$

$\Rightarrow$ Halveringsmetoden konvergerer med 1ste orden

Oppsummering:
- Svært enkel metode
- Finner alltid EN løsning
- Nokså enkelt å finne startverdier
- konvergerer med orden 1.

Alternativer til halveringsmetoden

Sekantmetoden



Vi tilnærmer f med sekanten S(x)
en lineær funksjon gjennom
(a, f(a)) og (b, f(b))
Bruker nullpunktet til sekanten som
tilnærming til nullpunktet til f

Detaljer: S(x) er gitt ved

$$S(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$$

Finner nullpunktet: dvs x slik at $S(x) = 0$

$\Rightarrow$ løser $S(x)=0$ for x og får

$$\boxed{x = b - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(b)}$$

Algoritme 10.11 (Sekantmetoden)

$x_0 = a$; $x_1 = b$;

for $i = 2, 3, \dots, N$

$$x_i = x_{i-1} - \frac{x_{i-1} - x_{i-2}}{f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})} f(x_{i-1})$$