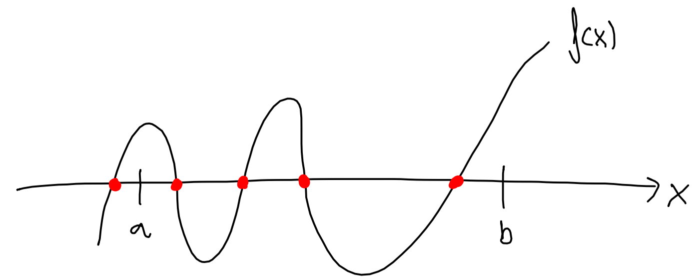
FORELESNING 17.11.2015

FORTSETTER PÅ SEKSJON 10

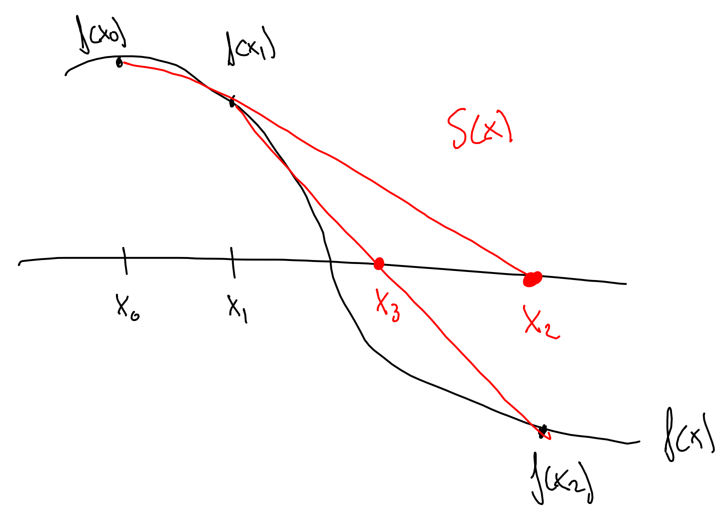
$$f(x) = 0$$



Slike x kalles løsning, nullpunkt, rot, ...

Så på halveringsmetoden og sekantmetoden

Fortsetter på sekantmetoden



Tilnærmer f med en lineær funksjon: Sekanten S(x)

Finner isteden løsning til

$$S(x) = 0$$

S(x) kan defineres som

$$S(x) = f(x_1) - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_1 - x)$$

Setter S(x) = 0

$$f(x_1) - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_1 - x) = 0$$

$$x_2 = x = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} \cdot f(x_1)$$

kaller denne x for x_2

Sekant-metoden

Gitt x_0, x_1 og f

for $i = 2, \dots, N$

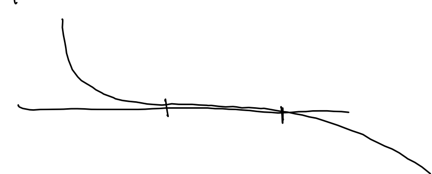
$$x_i = x_{i-1} - \frac{x_{i-1} - x_{i-2}}{f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})} f(x_{i-1})$$

Genererer en følge $x_2, x_3, \dots, x_N$ med tilnærminger til løsningen av $f(x) = 0$

Håper at sekvensen konvergerer mot et nullpunkt c, altså slik at $f(c) = 0$

Se på relativ feil $\dfrac{|x_i - c|}{|c|} \approx \dfrac{|x_i - c|}{|x_i|} \approx \dfrac{|x_i - x_{i-1}|}{|x_i|}$

Kan stoppe når $\dfrac{|x_i - x_{i-1}|}{|x_i|} < \varepsilon$

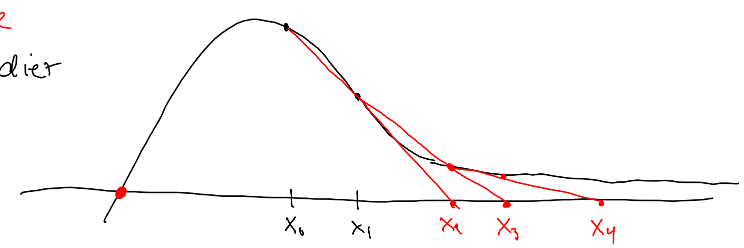


For å unngå problemer med $x_i \approx 0$ bruker vi istedenfor

$$|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon \cdot |x_i|$$

Sekant-metoden kan feile

$\Rightarrow$ avhenger av gode startverdier



La oss se på konvergens:

Definerer absoluttfeilen: $e_i = c - x_i$

Kan vise at $|e_i| \leq K \cdot |e_{i-1}|^r$ hvor $r = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1.618$

Vi sier at metoden konvergerer med orden 1,618

Dette innebærer at hvis metoden konvergerer og $f'(c) \neq 0$, da øker antallet korrekte siffer med ca 62% i hver iterasjon

Eks 10.16 Finn x slik at $x^2 - 2 = 0$

med $x_0 = 2$ og $x_1 = 1{,}8$

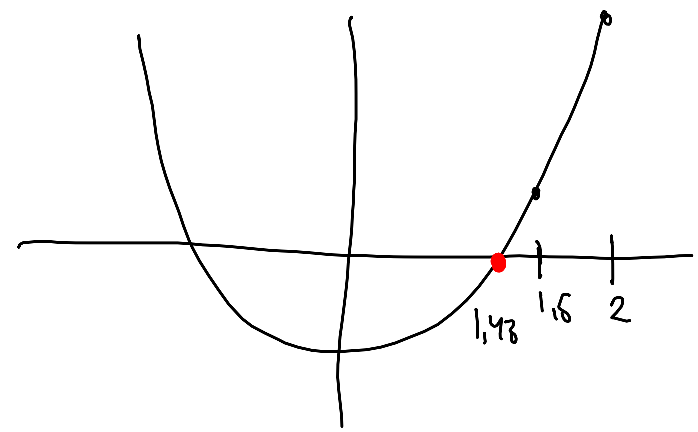
Feilen: $1{,}4 \cdot 10^{-2}$

$4{,}2 \cdot 10^{-4}$

$2{,}1 \cdot 10^{-6}$

$3{,}2 \cdot 10^{-10}$

$2{,}4 \cdot 10^{-16}$



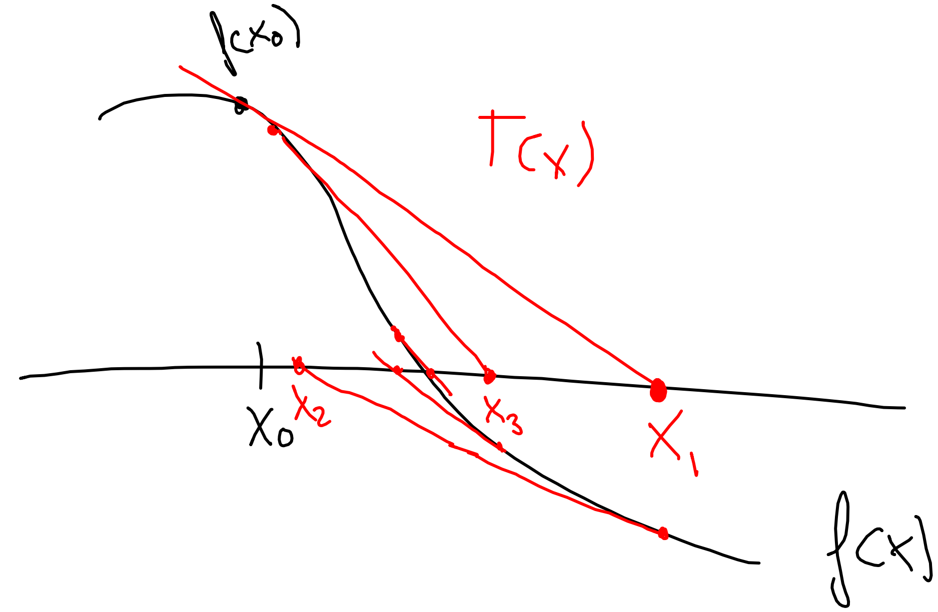
Newtons-metode

Gitt f og x_0

Vi tilnærmer f med dens tangent i x_0:

$$T(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$$

Bruker en løsning av $T(x) = 0$ som en tilnærming til løsning av $f(x) = 0$



Løser $T(x) = 0$

$$f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) = 0$$

Løsningen er

$$x_1 = \boxed{x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$$

Newtons metode

Gitt f og x_0

for $i = 1, 2, \cdots, N$

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$$

Metoden genererer en sekvens av estimater

$x_1, x_2, x_3, \dots$

Se på relativ feil, ca lik

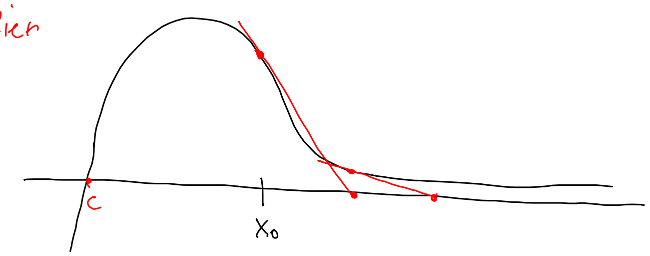
$$\frac{|x_i - x_{i-1}|}{|x_i|}$$

Tilsvarende sekant-metoden kan vi stoppe iterasjonene når

$$|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon \cdot |x_i|$$

Newtons metode funker heller ikke alltid

$\Rightarrow$ svært viktig med gode startverdier



Konvergens

Definerer abs-feil

$$e_i = c - x_i$$

Lemma 10.19: La c være et nullpunkt til f, som har to kontinuerlig deriverte. Da er feilen

$$e_{i+1} = \frac{f''(\xi_i)}{2f'(x_i)} \cdot e_i^2 \qquad \text{for } \xi_i \in (c, x_i) \quad ((x_i, c) \text{ hvis } x_i < c)$$

Kan utfra dette finne følgende estimat når $|f'(x)| > \gamma > 0$ i omegn av x

$$|e_{i+1}| \leq K \cdot |e_i|^2 \qquad \text{hvor } K > 0 \text{ og konstant} \quad (\text{thm } 10.20)$$

Vi sier at Newtons metode har <u>kvadratisk konvergens</u>

Eks 10.22: Finn x slik at $x^2 - 2 = 0$

Newton gir da følgende feil med $x_0 = 1.7$

$2.3 \cdot 10^{-1}$

$2.4 \cdot 10^{-2}$

$2.0 \cdot 10^{-4}$

$1.4 \cdot 10^{-8}$

$7.2 \cdot 10^{-17}$