Forelesning 19. oktober 2015

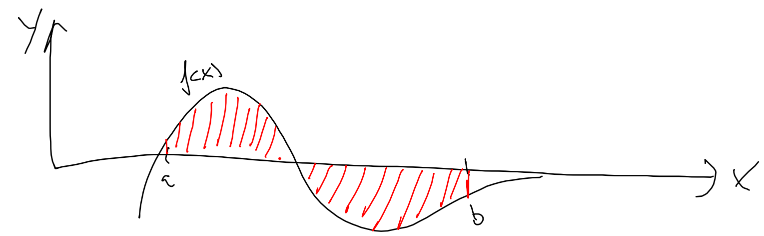
Forrige gang: numerisk derivasjon

HOVEDIDE: TILNÆRME EN f MED POLYNOM P

Denne uken

- Numerisk integrasjon
- Differensialligninger

Integrasjon



$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{„AREAL UNDER } f\text{"}$$

IKKE ALLE FUNKSJONER KAN INTGRERES

⇒ BRUKE NUMERISKE TILNÆRMINGER

DEFINERES:

partisjon: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

Deler opp: $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

Se på ett intervall

$$(x_1 - x_0)\cdot m_0 \leq \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \leq (x_1 - x_0)\cdot M_0$$

Summerer opp alle „boksene"

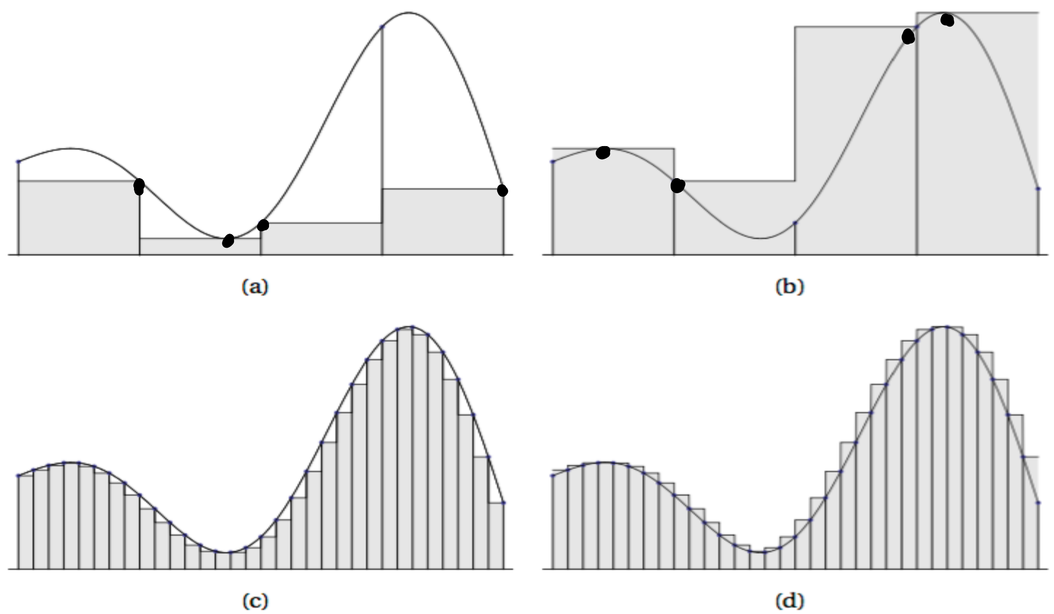
$$\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

$$\underline{I} \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \overline{I}$$

Numerisk integrasjon

$$\underline{I} \le \int_a^b f(x) \le \overline{I}$$

$\underline{I}$

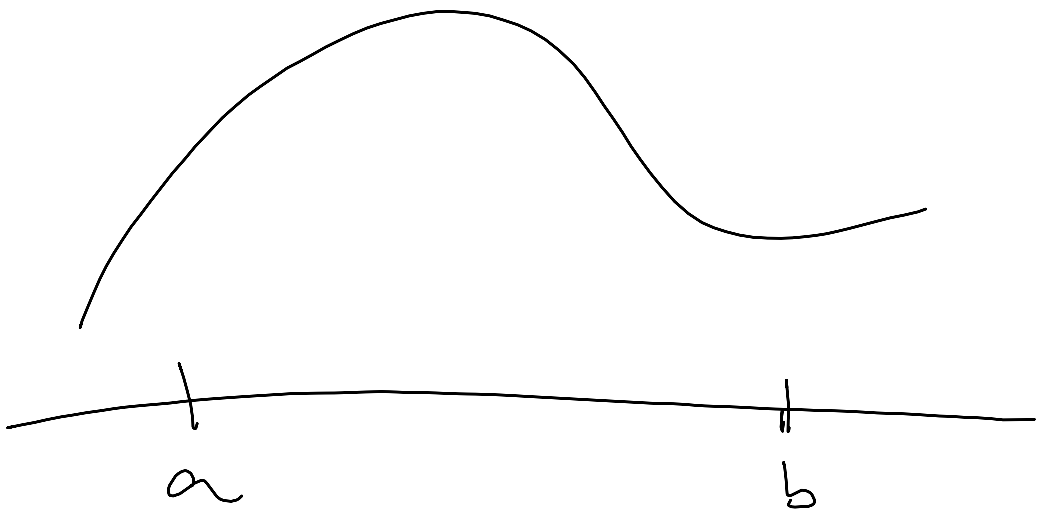


$\overline{I}$

Vi sier at f er integrerbar hvis $\sup \underline{I}$ og $\inf \overline{I}$ begge eksisterer og er like.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \sup \underline{I} = \inf \overline{I}$$

NUMERISK INTEGRASJON



Beregn $\int_a^b f(x)\,dx$:

Strategi: Lag en tilnærming til f og integrer denne

Typisk bruker vi polynomer.

Midtpunktsmetoden

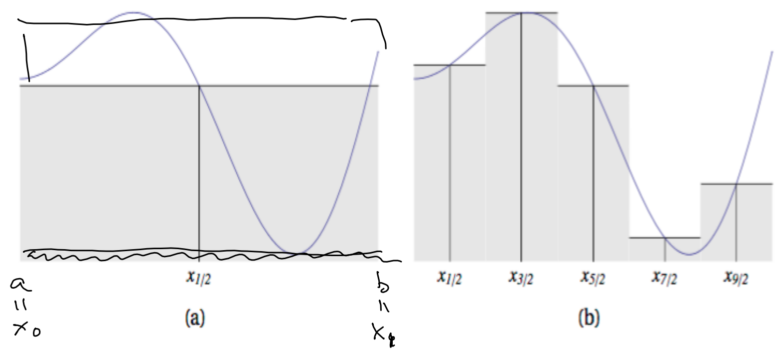


Figure 12.3. The midpoint rule with one subinterval (a) and five subintervals (b).

Enkel strategi er å bruke midtpunktet:

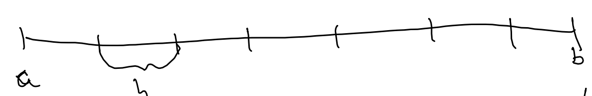
$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\cdot f(x_{1/2})}_{=I_{mid}} \qquad x_{\frac{1}{2}} = \frac{a+b}{2}$$

$$\underline{I} \le I_{mid} \le \overline{I}$$

Hvis f er integrerbar så vet vi at $\underline{I} \to \overline{I}$

$\Rightarrow$ gjør ingenting galt

Generelt velger vi en „fin nok" partisjon med små intervaller med konstant lengde h $\quad h = (b-a)/n$



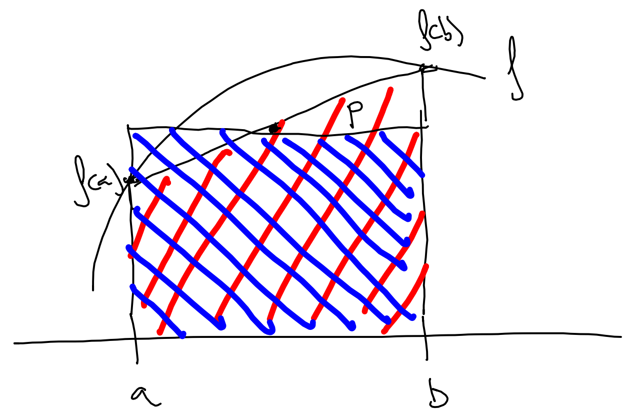
$x_i = a + h\cdot i$

Sier at $I_{mid}(h)$ er midtpunktsmetoden med en slik partisjon

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx I_{mid}(h) = h \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-\frac{1}{2}})$$

hvor $x_{i-\frac{1}{2}} = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$

TRAPES METODEN



Skal finne $\int_a^b f(x)\,dx$

Trapes-metoden: Tilnærme f med et lineært polynom

La oss bruke interpolasjon i a og b

Finn p av grad 1 slik at $p(a) = f(a)$ og $p(b) = f(b)$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p(x)\,dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

Generelt: Lager vi en fin partisjon med $h = \frac{b-a}{n}$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\,h$$

$$= h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

SIMPSONS METODE

Samme ide som før: Bruker kvadratiske polynomer

Simpsons metode

Samme ide som før: Bruker kvadratiske polynomer

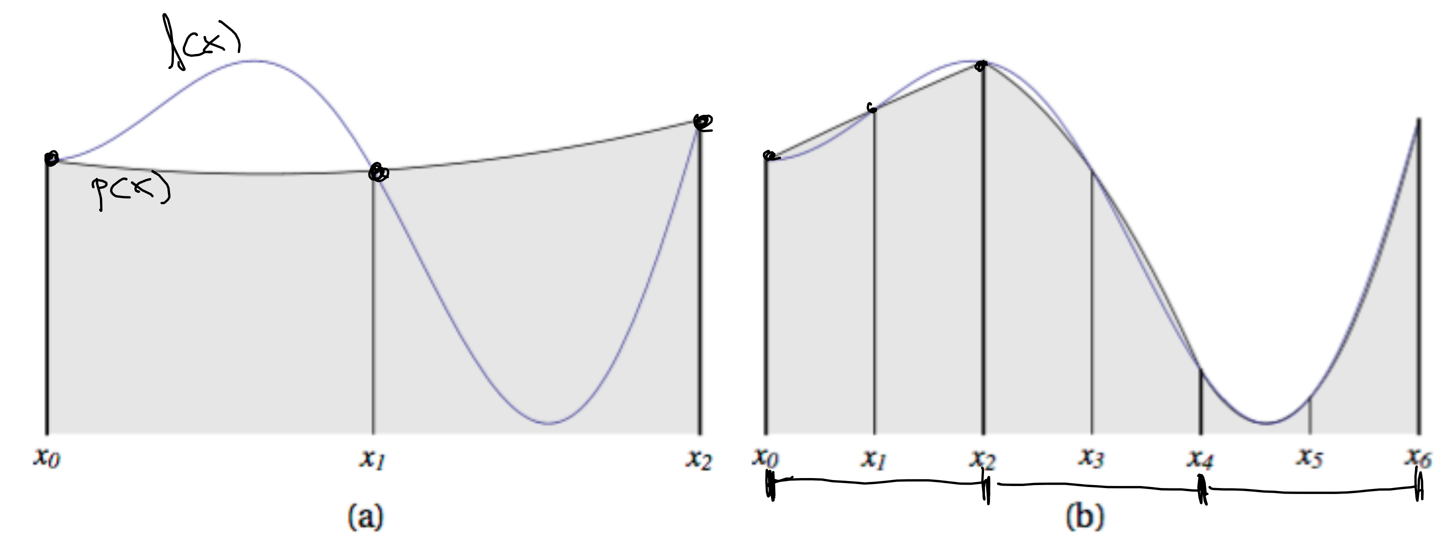


Figure 12.5. Simpson's rule with one subinterval (a) and three subintervals (b).

$p(x)$ er polynomet av grad 2 som interpolerer i 3 plassen

krever at $p(x_0) = f(x_0)$, $p(x_1) = f(x_1)$ og $p(x_2) = f(x_2)$

Kan finne $p(x)$ uttrykt ved $f(x_0), f(x_1), f(x_2), x_0, x_1, x_2$

Generelt deler vi opp integrasjonsområdet i mindre biter

<u>Thm 12.12:</u>

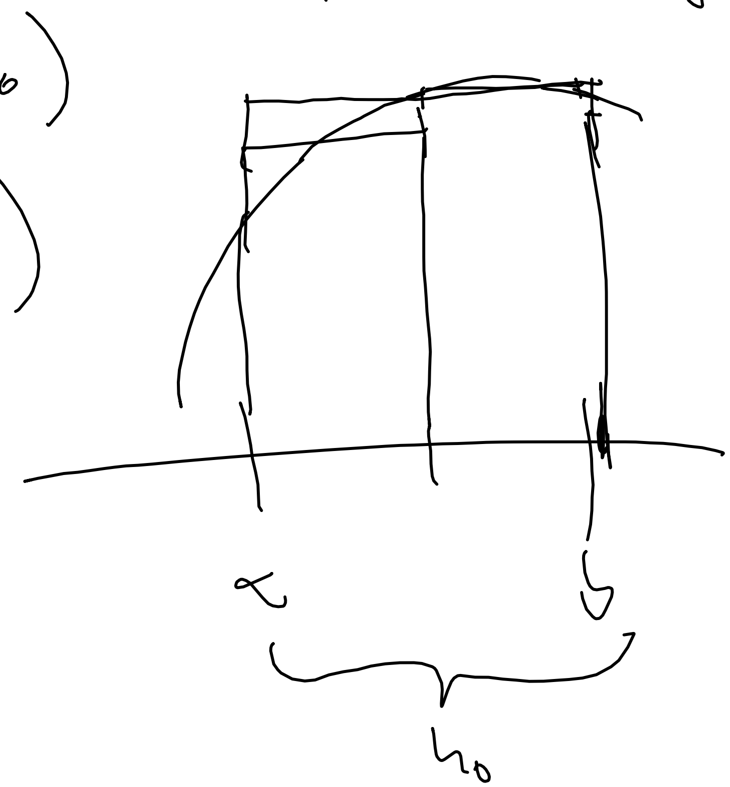
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx I_{simp}(h) = \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) \right)$$

GENERELL METODE

La $I(h)$ betegne en eller annen approksimasjonsmetode!

La $h_0 = b - a$ og regn ut $I(h_0)$

La $h_1 = \frac{h_0}{2}$ og regn ut $I(h_1)$



Se på $|I(h_1) - I(h_0)|$

Hvis denne er liten kan vi håpe at feilen er liten!

Fortsett med å halvere h til

$$\left| I(h_k) - I(h_{k-1}) \right| \leq \varepsilon \quad \text{(valgt nøyaktighet)}$$

NB: Ikke en <u>sikker</u> metode!