Forelesning 20. oktober 2015

I går: numerisk integrasjon

I dag:

- Numerisk integrasjon: eksempel
- Differensialligninger (kap 13 i komp, 10 i Kalkulus)

Numerisk eksempel

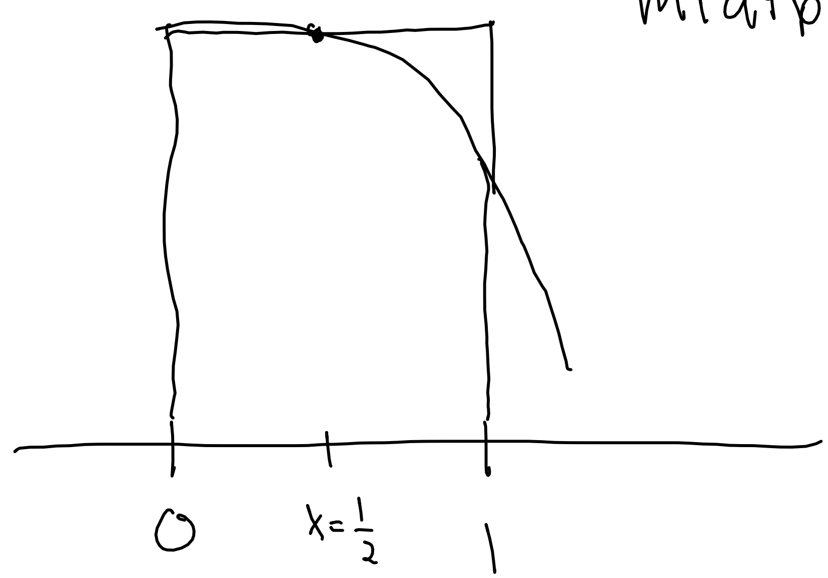
```
def f(x):
        return cos(x)

def midpoint(f,a,b,n):
        h = (b-a)/n
        Int = 0.0
        x = a + 0.5*h
        for k in range(1,n+1):
                Int += f(x)
                x += h
        return (h*Int)

a = 0.0; b = 1.0; n=1

I = midpoint(f,a,b,n)
```

Beregne $\int_0^1 \cos x \, dx$ med midtpunktsmetoden



Gjentatt halvering av h

```
a = 0.0; b = 1.0
M = 22
eps = 1.0e-12

j = 1; n = 1
I = midpoint(f,a,b,n)

abserr = abs(I)
print "%2i. iterasjon: I=%1.14f, relativ feil= %e" %(j, I, abserr/abs(I))

while j<M and abserr>eps*abs(I):
        j = j + 1
        Ip = I
        n = 2*n
        I = midpoint(f,a,b,n)
        abserr = abs(I-Ip)

        print "%2i. iterasjon: I=%1.14f, relativ feil= %e" %(j, I, abserr/abs(I))

print "\n%i iterasjoner: I=%1.14f relativ feil=%e " %(j, I, abserr/abs(I))
print "\nEksakt verdi=%1.14f, eksakt relativ feil=%e" %(sin(1.0),abs(sin(1.0)-I)/abs(sin(1.0)))
```

Numeriske resultater

```
ɔjbit.uio.no>python midpoint1.py
 1. iterasjon: I=0.87758256189037, relativ feil= 1.000000e+00
 2. iterasjon: I=0.85030064529223, relativ feil= 3.208502e-02
 3. iterasjon: I=0.84366631670255, relativ feil= 7.863688e-03
 4. iterasjon: I=0.84201906724650, relativ feil= 1.956309e-03
 5. iterasjon: I=0.84160795858156, relativ feil= 4.884800e-04
 6. iterasjon: I=0.84150522532519, relativ feil= 1.220827e-04
 7. iterasjon: I=0.84147954475436, relativ feil= 3.051835e-05
 8. iterasjon: I=0.84147312478308, relativ feil= 7.629443e-06
 9. iterasjon: I=0.84147151980098, relativ feil= 1.907352e-06
10. iterasjon: I=0.84147111855612, relativ feil= 4.768373e-07
11. iterasjon: I=0.84147101824495, relativ feil= 1.192093e-07
12. iterasjon: I=0.84147099316716, relativ feil= 2.980232e-08
13. iterasjon: I=0.84147098689771, relativ feil= 7.450580e-09
14. iterasjon: I=0.84147098533035, relativ feil= 1.862647e-09
15. iterasjon: I=0.84147098493851, relativ feil= 4.656643e-10
16. iterasjon: I=0.84147098484055, relativ feil= 1.164068e-10
17. iterasjon: I=0.84147098481608, relativ feil= 2.908053e-11
18. iterasjon: I=0.84147098480993, relativ feil= 7.312024e-12
19. iterasjon: I=0.84147098480840, relativ feil= 1.814416e-12
20. iterasjon: I=0.84147098480805, relativ feil= 4.223347e-13

20 iterasjoner: I=0.84147098480805 relativ feil=4.223347e-13

Eksakt verdi=0.84147098480790, eksakt relativ feil=1.795681e-13
```

DIFFERENSIAL-LIGNINGER (KAP 13 i KOMP
KAP 10 i KALKULUS)

Anta at et legeme med konstant fart

$v = 1$

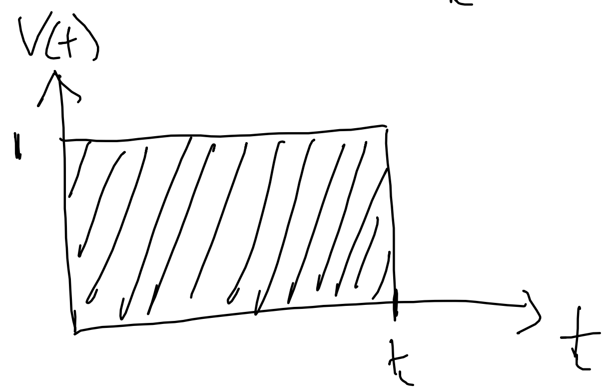
Vet at $v(t) = x'(t)$ $\quad x(t) =$ posisjon

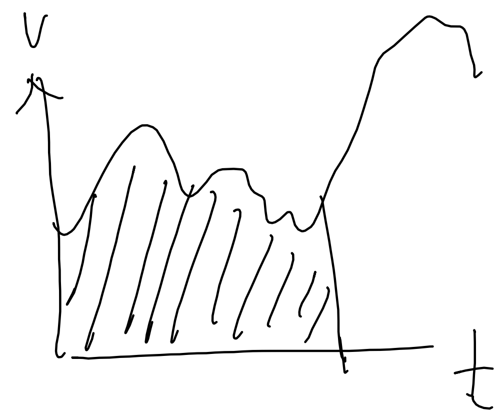
Hva er posisjonen $x(t)$ hvis $x(0) = 0$?

$$x(t) = \int x'(t)\,dt = \int 1\,dt = t + C \qquad C = \text{konstant}$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$x(t) = t$$





Mer komplisert

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

Differensial-ligning: $x(t)$ som er ukjent

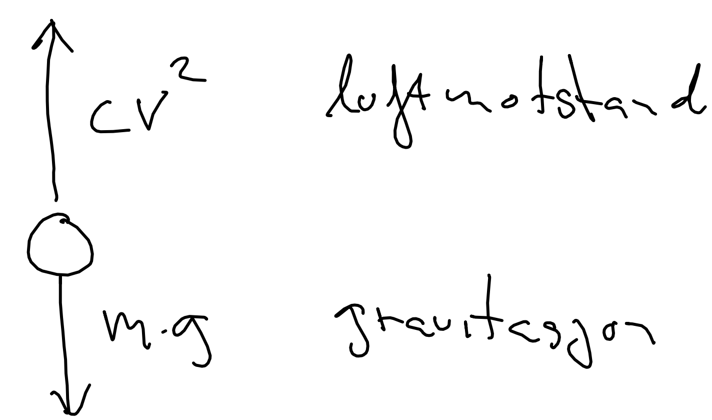
DIFF-LIGNINGER

Hvor kommer de fra?

- FYSIKK: været, planetbaner, oljereservoirer, crash-tester, mekanikk, ...
- FINANS: renter, avkastning
- BIOLOGI: dyrepopulasjon
- KJEMI

Eks: La oss se på en ball som faller

Newtons 2. lov: $F = m \cdot a$



Sette opp ligning

$$ma = mg - cv^2$$

Vet også at $a = v'$

$$\boxed{mv' = mg - cv^2}$$

En ligning hvor $v(t)$ er ukjent

FØRSTE ORDENS DIFF-LIGNINGER (KAP 13.2)

$x'(t) = f(t, x)$ der f er en gitt funksjon

$x = x(t)$ er den ukjente

Eks ① $x' = 3$ $f(t,x) = 3$

② $x' = 2t$ $f(t,x) = 2t$

③ $x' = x$ $f(t,x) = x$

kan løses enkelt

① $x' = 3 \implies x(t) = 3t + C$

② $x' = 2t \implies x(t) = t^2 + C$

③ $x'(t) = x(t) \implies x(t) = C \cdot e^t$

Startverdier

Vet at $x(0) = 1$

① $x(t) = 3t + 1$

② $x(t) = t^2 + 1$

③ $x(0) = C \cdot 1 = 1 \implies x(t) = e^t$

Eks 4

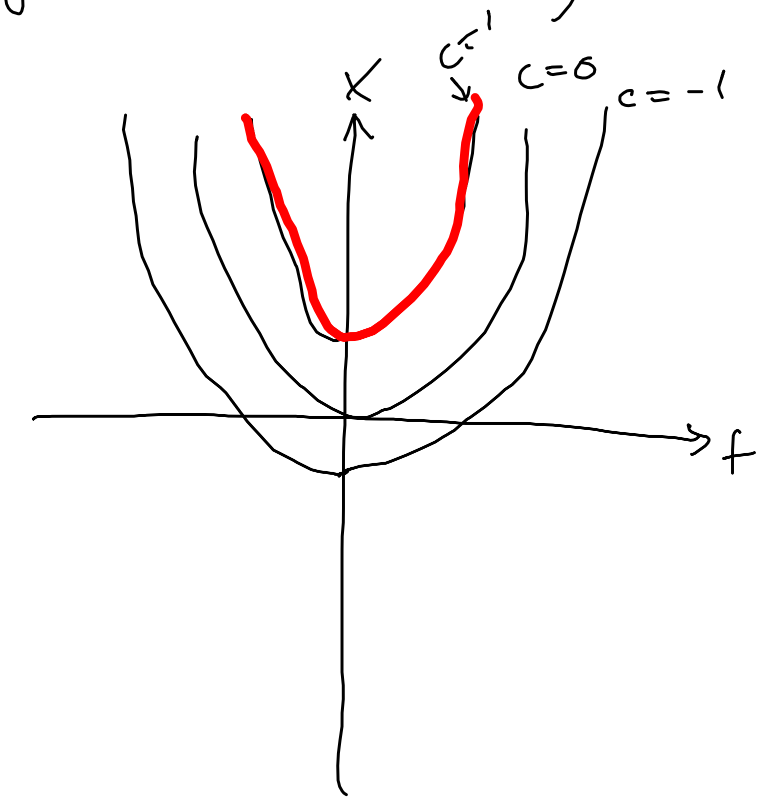
④ $x' = t^3 + \sqrt{x}$

FAMILIER AV LØSNINGER

Ligningen $x'(t) = f(t, x(t))$ har en hel familie av løsninger. En initialbetingelse (startverdi) bestemmer løsningen.

Eks 2: $x'(t) = 2t$

$$x(t) = t^2 + C$$

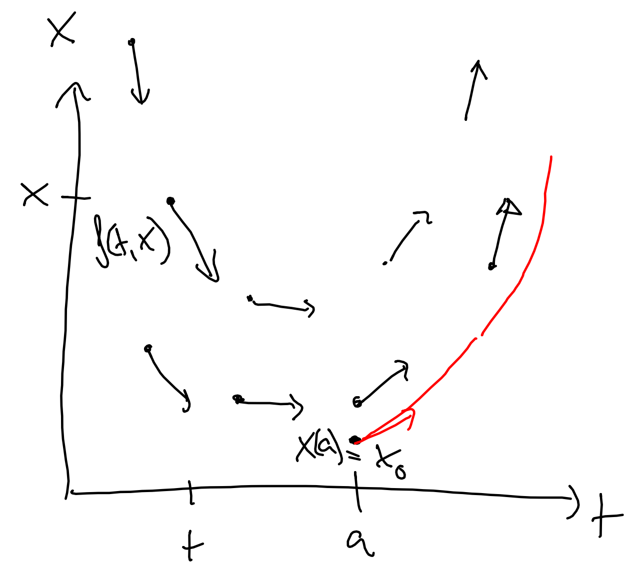


Hvis vi krever $x(0) = 1$

$$\Rightarrow x(t) = t^2 + 1$$

HVA ER EN DIFF-LIGNING?

Hva betyr $x'(t) = f(t,x)$?



Utfordring: Hvordan kan vi finne $X(t)$ om vi kjenner $X(a)=X_0$?

Kan ikke løses analytisk

$\Rightarrow$ Må bruke tilnærmingen

Strategi: Har $x' = f(t,x)$ $X(a)=X_0$

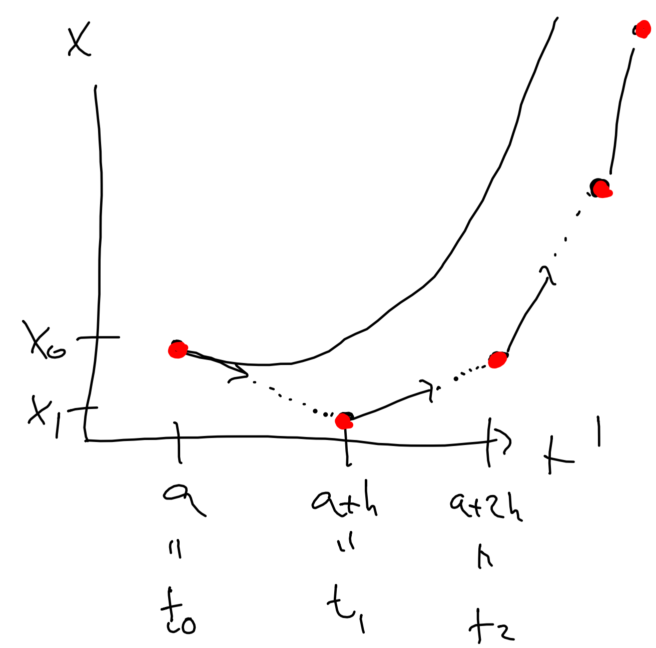
Velg steglengde $h>0$

Finn en tilnærming X_1 til $x(t)$ i $t_1 = a+h$

i håp om $x(t_1) \approx X_1$

Fortsetter slik så lenge vi ønsker

Finner en „diskret" løsning, dvs. en tilnærming til $x(t)$ i punktene $t_k = a + k \cdot h$

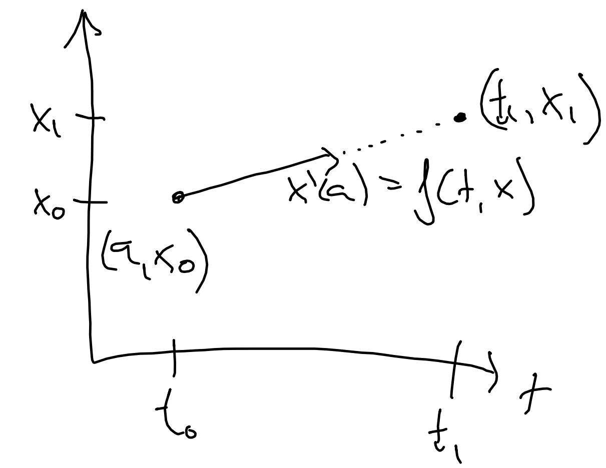


EULERS METODE

ENKEL IDE: ① Start i (a, x_0) $\quad x(a) = x_0$

② Regn ut tangenten $T_a(t)$

③ Følg $T_a(t)$ til $a+h = t_1$



DETALJER: $T_a(t) = x(a) + (t-a)\,x'(a)$

$$= x_0 + (t-a) \cdot f(a, x_0)$$

Alt er kjent!

Følge $T_a(t)$ til $t = a+h$

$$x(t_1) \approx x_1 = x_0 + h \cdot f(a, x_0)$$

Algoritme 13.12: velg h, f.eks $h = \frac{b-a}{n}$

$t_0 = a$

for $k = 0, 1, \dots, n-1$

$$x_{k+1} = x_k + h \cdot f(t_k, x_k)$$

$$t_{k+1} = t_k + h = a + (k+1)h$$

Denne genererer $x_1, x_2, \dots$ som er tilnærminger til $x(t_1), x(t_2) \dots$