13.1.3

En lineær differensiallikning av orden p er en likning på formen

$$x^{(p)}(t) = f(t) + g_0(t)x(t) + g_1(t)x'(t) + \dots + g_{p-1}(t)x^{(p-1)}(t).$$

Oppgaven: Hvilke av disse er lineære?

a) $x'' + t^2 x' + x = \sin t$

$(x''(t) + t^2 x'(t) + x(t) = \sin t)$

$x'' = \sin t - x - t^2 x'$

$f(t) = \sin t$

$g_0(t) = -1$

$g_1(t) = -t^2$

ser at $x'' + t^2 x' + x = \sin t$ er en lineær likning.

b) $x''' + (\cos t)x' = x^2$

ikke lineær!

c) $\underbrace{x'x}_{\text{ikke lineær!}} = 1.$

d) $x' = \frac{1}{1+x^2}$

ikke lineær

e) $x' = \frac{x}{1+t^2}$ er lineær. $\left(\begin{array}{l} f(t) = 0 \\ g_0(t) = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right)$

13.2.2

Løs differensiallikningen

$$x' + x\sin t = \sin t.$$

Kan løses på to måter (minst.)

1. Separabel:

$$x' = \sin t - x\sin t$$
$$= \sin t\,(1-x)$$

$$\frac{x'}{1-x} = \sin t \qquad x \neq 1$$

„Alt med x" på en side, og „alt med t" på den andre.

Integrer begge sider med hensyn på t.

$$\int \frac{x'}{1-x}\,dt = \int \sin t\,dt.$$

Vi ser at

$$\int \sin t\,dt = -\cos t + C_1,$$ der C_1 er en integrasjonskonstant.

Nå vil vi regne ut

$$\int \frac{x'}{1-x}\,dt.$$ Vi gjør en substitusjon: $dx = x'\,dt.$

$$\| $$

$$\int \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln|1-x| + C_2.$$

Vi har funnet at

$$-\ln|1-x| + C_2 = -\cos t + C_1.$$

Slår sammen konstantene:

$$-\ln|1-x| = -\cos t + C_3$$
$$\ln|1-x| = \cos t + C_4 \qquad (C_4 = -C_3)$$

„e begge sider":

$$|1-x| = e^{\cos t + C_4} = e^{C_4} e^{\cos t}$$
$$= C_5 e^{\cos t} \quad \text{der } C_5 > 0.$$

Får vekk $|\cdot|$:

$$1-x = \pm C_5 e^{\cos t}$$

Løser for x:

$$x = 1 \mp C_5 e^{\cos t} = 1 + C_6 e^{\cos t}$$

der $C_6 \neq 0$ er en konstant.

Hvis $C_6 = 0$ får vi løsningen $x(t) = 1$.

Vi sjekker om det er en løsning:

$x'(t) = 0$, så

$x' + x\sin t = \sin t$, og da er det OK.

Vår endelige løsning:

$$x(t) = 1 + De^{\cos t} \quad \text{der } D \text{ er en konstant.}$$

2. Vi kan gange med integrerende faktor.

Husk $(uv)' = u'v + uv'$

triks: Hvis $F'(t) = f(t)$ og $g(t)$ er en funksjon

$$\left(e^{F(t)} g(t)\right)' = \left(e^{F(t)}\right)' g(t) + e^{F(t)} g'(t)$$

$$= e^{F(t)} f(t) g(t) + e^{F(t)} g'(t).$$

$$= e^{F(t)} \left(f(t) g(t) + g'(t)\right)$$

Vi har nå $x' + x\sin t = \sin t.$

Så om $g = x$, $f(t) = \sin(t)$ får vi

Vi vet at $-\cos t$ er en antiderivert til $\sin t$,

og ganger med $e^{-\cos t}$ på begge sider.

$$e^{-\cos t} x' + x \sin t \, e^{-\cos t} = e^{-\cos t} \sin t$$

$$\left(e^{-\cos t} x\right)' = \left(e^{-\cos t}\right)'.$$

Ved å integrere får vi

$$e^{-\cos t} x = e^{-\cos t} + C$$

der jeg har slått sammen integrasjonskonstantene.

$e^{-\cos t} \neq 0$, så vi deler på det:

$$x = 1 + \frac{C}{e^{-\cos t}} = 1 + Ce^{\cos t}$$

Vi har i alle fall funnet løsningen

$$x(t) = 1 + De^{\cos t} \quad (D \text{ en konstant})$$

av

$$x' + x\sin t = \sin t.$$

sette prøve $x'(t) = -De^{\cos t} \sin t$

og

$$x' + x\sin t = \cancel{-De^{\cos t} \sin t} + \sin t + \cancel{De^{\cos t} \sin t}$$
$$= \sin t$$

a) $x(0) = 1 - e.$

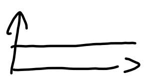
$$x(0) = 1 + De^{\cos 0} = 1 + De, \quad D = -1.$$

$$x(t) = 1 - e^{\cos t}.$$

b) $x(4) = 1$

$$x(4) = 1 + De^{\cos 4}, \quad D = 0$$

$$x(t) = 1.$$



c) $x(\frac{\pi}{2}) = 2$

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + De^{\cos\frac{\pi}{2}} = 1 + De^{0} = 1 + D$$

$$D = 1$$

$$x(t) = 1 + e^{\cos t}$$

d) $x(-\frac{\pi}{2}) = 3$

$$x(t) = 1 + De^{0} = 1 + D, \quad D = 2$$

$$x(t) = 1 + 2e^{\cos t}$$

13.3.3

Bruk Eulers metode i 3 steg med $h=0.1$.

$$x_{k+1} = x_k + h\cdot \overbrace{f(t_k, x_k)}^{\approx x'(t_k)}$$

$$t_{k+1} = t_k + h$$

a) $x' = t + x$, $x(0) = 1$.

I dette tilfellet er $f(t,x) = t+x$.

$t_0 = 0$. $x_0 = 1$.

$t_1 = 0.1$, $x_1 = \underset{x_0}{1} + \underbrace{0.1}_{h}\underbrace{(0+1)}_{f(t_0,x_0)} = 1.1$

$t_2 = 0.2$, $X_2 = \underset{x_1}{1.1} + \underset{h}{0.1}\underset{f(t_1,x_1)}{(0.1+1.1)} = 1.22$

$t_3 = 0.3$, $X_3 = \underset{x_2}{1.22} + \underset{h}{0.1}\underset{f(t_2,x_2)}{(0.2+1.22)} = 1.362$

$$\begin{array}{cccc} (t_0, x_0), & (t_1, x_1), & (t_2, x_2), & (t_3, x_3) \\ \parallel & \approx & \approx & \approx \\ (t_0, x(t_0)) & (t_1, x(t_1)) & (t_2, x(t_2)) & (t_3, x(t_3)) \end{array}$$

b) $x' = \cos x$ $\quad f(t,x) = \cos x$ $\quad x(0) = 0$.

$t_0 = 0$, $x_0 = 0$

$t_1 = 0.1$, $x_1 = 0 + 0.1\cdot\cos 0 = 0.1$

$t_2 = 0.2$, $x_2 = 0.1 + 0.1\cdot\cos 0.1 \simeq 0.1995$

$t_3 = 0.3$, $x_3 = 0.1995 + 0.1\cdot\cos 0.1995 \simeq 0.2975$

13.3 6 En vanlig tilnærming til den deriverte er

$$x'(t) \approx \frac{x(t+h)-x(t)}{h}$$

La t være et gitt punkt og gjør en Taylorutvikling av grad 1 til x i punktet t:

$$T_1(y) = x(t) + x'(t)(y-t)$$

Se komp. for feilanalyse $\left[R_1(y) = \frac{x''(c)}{2}(y-t)^2 \quad c \in (t,y)\right]$

$$x(t+h) \approx T_1(t+h) = x(t) + x'(t)\cdot h.$$

Altså, $x(t+h) \approx x(t) + h\cdot x'(t)$

$$x'(t) \approx \frac{x(t+h)-x(t)}{h}$$

Vi skriver om:

$$x(t+h) \approx x(t) + h\cdot x'(t).$$

Hvis vi da har en differensialligning

$x'(t) = f(t, x(t))$ setter vi inn og får

$$x(t+h) \approx x(t) + h\cdot f(t, x(t)).$$

Dette gir Eulers metode.

13.3 4 Implementér Eulers metode.

Anta f, a, b og n er gitt og $x(a) = x_0$.
Da er Eulers metode

$h = (b-a)/n$

$t_0 = a$

for $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

$x_{k+1} = x_k + h \cdot f(t_k, x_k)$

$t_{k+1} = a + (k+1)h$

Test på likningen $x' = x$, $x(0) = 1$ på $[0, 1]$ $(a = 0, b = 1)$. Forskjellig n.
(Merk: Løsningen er $x(t) = e^t$).

n	x_n
2	2.25
100	2.7
10 000	2.71815
1 000 000	2.71828 ..

```
>>> def euler(f, a, b, x_0, n):
        h = (b-a)/n
        x = [x_0]
        t = [a]
        for k in range(0,n):
            x.append(x[k] + h * f(t[k],x[k])) #Ikke bruk append sånn
            t.append(t[k] + h)
        return (t, x)

>>> def f(t,x):
        return x
```