Kompendiet 13.4

(2) Se på differensiallikningen $x' = x$
$x(0) = 1$

[Løsningen er $x(t) = e^t$].

a) $f(t,x) = x$.

Eulers metode, steg $h = 1$.

$x_0 = 1$

$x_1 = x_0 + h f(t_0, x_0) = 1 + 1 \cdot 1 = 2$

b) Eulers midtpunktsmetode $h = 1$

$x_0 = 1$

$x_{0+1/2} = x_0 + \frac{h}{2} f(t_0, x_0) = 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$

$x_1 = x_0 + h f(t_0 + \frac{h}{2}, x_{0+\frac{1}{2}})$

$= 1 + 1 \cdot \frac{3}{2} = 2.5$

c) Runge-Kutta orden 4 $h = 1$

[Se s. 341 i komp. T 13.20]

$x_0 = 1$

$k_0 = f(t_0, x_0) = x_0 = 1$

$k_1 = f(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + h \cdot \frac{k_0}{2}) = 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} = 1.5$

$k_2 = f(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + h \cdot \frac{k_1}{2}) = 1.75$

$k_3 = f(t_0 + h, x_0 + h \cdot k_2) = 2.75$

$x_1 = x_0 + \frac{h}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)$

≈ 2.70833

d) Runge-Kutta orden 4, $h = \frac{1}{2}$.

$x_0 = 1$

$\vdots$

$x_1 \approx 1.648$

$\vdots$

$x_2 \approx 2.71735$

Kompendiet 13. 6

① d) Skriv som et system av førsteordenslikninger (x, y funk. av t)

$$x''' = y'' x^2 - 3(y')^2 x$$
$$y'' = t + x'$$

Definér

$$x_1 = x$$
$$x_2 = x_1' = x'$$
$$x_3 = x_2' = x''$$
$$x_4 = y$$
$$x_5 = y'$$

Skrive som system:

$$x_1' = x_2$$
$$x_2' = x_3$$
$$x_3' = y'' \cdot (x_1)^2 - 3x_5^2 x_1$$
$$= (t + x_2) \cdot x_1^2 - 3 x_5^2 x_1$$
$$x_4' = x_5$$
$$x_5' = t + x_2$$

Kalkulus 10.1

7) Løs differensiallikningen

$$(x+1)y' + y - 1 = 0 \quad \text{der } x > -1.$$

Poenget er å huske
$(uv)' = uv' + u'v$

Ser at $(x+1)' = 1$. Så

$$\big(\underbrace{(x+1)}_{u}\underbrace{y}_{v}\big)' = \underbrace{(x+1)y' + y}$$

kjenner igjen dette over.

Vi kan skrive om (og flytte 1-eren):

$$((x+1)y)' = 1$$

Vi kan integrere begge sider mhp. x:

$$(x+1)y = \int 1\,dx + C$$

$$(x+1)y = x + D$$

$x > -1$, så $x+1 > 0$,

$$y = \frac{x+D}{x+1} \qquad \text{La } \tilde{D} = D - 1$$

så $D = 1 + \tilde{D}$

$$= \frac{x+1+\tilde{D}}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} + \frac{\tilde{D}}{x+1} = 1 + \frac{\tilde{D}}{x+1}$$

Så $y(x) = 1 + \frac{\tilde{D}}{x+1}$ der $\tilde{D}$ er en konstant.

Kalkulus 10.4

2 a) Løs:

$$y' = 3yx \quad , y(0) = 4$$

$$\frac{y'}{y} = 3x \qquad [y \neq 0]$$

Integrerer mhp. x:

$$\int \frac{y'}{y}\,dx = 3\int x\,dx$$

ved substitusjon setter vi $dy = y'\,dx$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \frac{3}{2}x^2 + C$$

$$\ln|y| = \frac{3}{2}x^2 + C$$

Opphøyer e i begge sider: $a^{p+q} = a^p a^q$

$$|y| = e^{\ln|y|} = e^{\frac{3}{2}x^2 + C} = e^C e^{\frac{3}{2}x^2}$$

$|y| = D e^{\frac{3}{2}x^2}$ der D konstant og $D > 0$

$$y = \pm D e^{\frac{3}{2}x^2}$$

$= \tilde{D} e^{\frac{3}{2}x^2}$ der $\tilde{D}$ er konstant, $\tilde{D} \neq 0$

Men vi mistet $y = 0$ over:

Om $y = 0$ er $y' = 0$, og diff likningen holder.

Så det er OK med $\tilde{D} = 0$ også.

Generell løsning er $y(x) = \tilde{D} e^{\frac{3}{2}x^2}$, $\tilde{D}$ konst

Vi ønsker $y(0) = 4$:

$$y(0) = \tilde{D} e^{\frac{3}{2}\cdot 0^2} = \tilde{D}$$

Så løsningen vår er

$$\underline{\underline{y(x) = 4e^{\frac{3}{2}x^2}}}$$

Kalkulus 10.4

(10) Et vann har en fiskebestand hvis størrelse ved tiden t er gitt ved $x(t)$.

Antar endring bare er fødsler og dødsfall.

a) $$\frac{dx}{dt} = (\text{antall fødsler}) - (\text{antall dødsfall}).$$

Vi antar at dødsfall er propersjonalt med bestandens størrelse: Det finnes $a > 0$ slik at dødsfallene gis ved $ax(t)$.

Antar at sjansen for at en gitt fisk møter en vilkårlig annen i et lite tidsint. er prop. med bestandens størrelse: $\tilde{b}x(t)$.

Da finnes en $\bar{b}$ så det totale antall møter er $\tilde{b}x^2$. Antall fødsler prop. med dette, så det er en b så antall fødsler (i int.) er bx^2.

Vi får likningen

$$\frac{dx}{dt} = bx^2 - ax.$$

b) [se s. 519 og eks. 10.44]

Løs

$$x' = bx^2 - ax \qquad x(0) = x_0.$$

Skriver om:

$$\frac{x'}{bx^2 - ax} = 1 \qquad [bx^2 - ax \neq 0?]$$

Integrerer mhp. t:

$$\int \frac{x'}{bx^2 - ax}\,dt = \int 1\,dt = t + C_1$$

$$\int \frac{x'}{bx^2-ax}\,dt = \int \frac{1}{bx^2-ax}\,dx,$$ og her må vi bruke delbrøksoppspalting:

$$\frac{1}{bx^2-ax} = \frac{1}{x(bx-a)} \overset{\text{ønsker}}{=} \frac{A}{x} + \frac{B}{bx-a}$$

$$\frac{A(bx-a) + Bx}{x(bx-a)} = \frac{1}{x(bx-a)}$$

Vi vil ha

$$(Ab + B)x - aA = 1.$$

Da må $-aA = 1$, så $A = -\frac{1}{a}$, og vi får at

$$-\frac{b}{a} + B = 0, \text{ altså } B = \frac{b}{a}.$$

Dermed er

$$\frac{1}{bx^2-ax} = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a(bx-a)}$$

Nå kan vi løse integralet.

$$\int \frac{1}{bx^2-ax}\,dx = \int \left(-\frac{1}{ax} + \frac{b}{a(bx-a)}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{a}\ln|x| + \frac{1}{a}\ln|bx-a| + C_2$$

Vi har funnet at

$$\frac{\ln|bx-a| - \ln|x|}{a} = t + C_3 \quad \Big| \cdot a$$

Vi tar begge sider som potenser, merk

$$\ln|bx-a| - \ln|x| = \ln\frac{|bx-a|}{|x|} = \ln\left|\frac{bx-a}{x}\right|$$

$$e^{\ln\left|\frac{bx-a}{x}\right|} = e^{at + aC_3} = e^{aC_3} e^{at}$$

aC_3 er bare en konstant, så $e^{aC_3} = C_4$ $\underset{>0}{\text{konstant}}$

Da ser vi at

$$\left|\frac{bx-a}{x}\right| = C_4 e^{at}$$

$$\frac{bx-a}{x} = C_5 e^{at} \quad \text{der } C_5 \neq 0 \text{ som før}$$

Overlatt til leser: $C_5 = 0$ ok.

I alle fall er

$$bx - a = x C_5 e^{at}$$

$$x(b - C_5 e^{at}) = a$$

$$x = \frac{a}{b - C_5 e^{at}} = \frac{a}{b + C_6 e^{at}}$$

Generell løsning:

$$x(t) = \frac{a}{b + Ce^{at}}. \qquad [\text{også mulig: } x(t) = 0]$$

Vi ønsker $x(0) = x_0$.

$$x(0) = \frac{a}{b + Ce^0} = \frac{a}{b + C} = x_0$$

$$a = x_0(b + C), \quad \frac{a}{x_0} = b + C$$

$$C = \frac{a}{x_0} - b.$$

Spesiell løsning:

$$x(t) = \frac{a}{b + \left(\frac{a}{x_0} - b\right)e^{at}}.$$

c) Husk: $x(t) = \dfrac{a}{b + \left(\frac{a}{x_0} - b\right)e^{at}}$

Vi vil finne en konstant k_0 slik at om $x_0 < k_0$ dør bestanden ut, mens om $x_0 > k_0$ blir den „uendelig" på endelig tid.

Vi ser i nevneren: $b + \left(\frac{a}{x_0} - b\right)e^{at}$.

Hvis $\frac{a}{x_0} - b > 0$ vil det siste leddet gå mot ∞ og bestanden mot 0. Da er $\frac{a}{x_0} - b > 0$,

altså er $x_0 < \underbrace{\frac{a}{b}}_{k_0}$.

Spørsmålet er: Hva om $x_0 > k_0$? Da er $\left(\frac{a}{x_0} - b\right) < 0$, så $\left(\frac{a}{x_0} - b\right)e^{at} \to -\infty$.

Men når det nærmer seg $-b$ vil vi få 0 i nevneren og bestanden går mot ∞.

d) Anta nå at vi konstant høster c fisk.

Da får vi modellen

$$\frac{dx}{dt} = bx^2 - ax - c$$

!

Finne c_0 som holder bestanden konstant.

Bestanden er konstant om den deriverte er 0, så vi vil ha

$$bx_0^2 - ax_0 - c = 0.$$

Vi setter ganske enkelt

$$c_0 = bx_0^2 - ax_0,$$

og da er $\frac{dx}{dt} = 0$ for alle t.