Kalkulus 10.5

3 Finne funksjoner som tilfredsstiller differensialllikningen og begynnelses betingelsene.

a) $y''-5y'+4y=0 \quad y(0)=2 \quad y'(0)=4$

Vi setter opp karakteristisk likning:

$r^2-5r+4=0$

[Hvorfor? Om vi gjetter $y=e^{rx}$ må vi ha

$y''-5y'+4y=0$

$y'=re^{rx}$ $y''=r^2e^{rx}$ (kjerne-regel)

Så da må

$r^2e^{rx}-5re^{rx}+4e^{rx}=0$

$e^{rx}(r^2-5r+4)=0$ for alle x

For at det skal stemme må

$r^2-5r+4=0$.]

$r^2-5r+4=0$ har løsningene

$r_1=4, \quad r_2=1.$

Den generelle løsningen er da

$y(x)=Ce^{4x}+De^{x}.$

$y'(x)=4Ce^{4x}+De^{x}$

Så

$y(0)=C+D=2$

$y'(0)=4C+D=-4.$

Denne har løsningen $C=-2, D=4.$

Så løsningen er

$y(x)=-2e^{4x}+4e^{x}.$

3 c) $y'' - 4y' - y = 0 \quad y(1) = 2,\ y'(1) = -1.$

Karakteristisk likning:

$$r^2 - 4r - 1 = 0$$

Denne har løsningene

$$r_1 = 2 + \sqrt{5},\ r_2 = 2 - \sqrt{5}.$$

Dermed er den generelle løsningen

$$y(x) = Ce^{(2+\sqrt{5})x} + De^{(2-\sqrt{5})x}$$

$$y'(x) = (2+\sqrt{5})Ce^{(2+\sqrt{5})x} + (2-\sqrt{5})De^{(2-\sqrt{5})x}$$

Begynnelsesbetingelser:

$$2 = y(1) = Ce^{2+\sqrt{5}} + De^{2-\sqrt{5}}$$

$$-1 = y'(1) = (2+\sqrt{5})Ce^{2+\sqrt{5}} + (2-\sqrt{5})De^{2-\sqrt{5}}$$

For å forenkle litt:

La $\bar{C} = Ce^{2+\sqrt{5}}$, $\bar{D} = De^{2-\sqrt{5}}$

Systemet er da

$$\bar{C} + \bar{D} = 2, \quad \bar{C} = 2 - \bar{D} \quad (*)$$

$$(2+\sqrt{5})\bar{C} + (2-\sqrt{5})\bar{D} = -1 \quad (**)$$

Setter inn $(*)$ i $(**)$ og får

$$\bar{D} = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}, \text{ som gir } \bar{C} = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Siden $C = e^{-(2+\sqrt{5})}\bar{C}$, $D = e^{-(2-\sqrt{5})}\bar{D}$ får vi

$$y(x) = e^{-(2+\sqrt{5})}\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)e^{(2+\sqrt{5})x} + e^{-(2-\sqrt{5})}\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)e^{(2-\sqrt{5})x}$$

som reduserer til

$$y(x) = \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)e^{(2+\sqrt{5})(x-1)} + \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)e^{(2-\sqrt{5})(x-1)}$$

11 To dyrearter lever i samspill. $N_1(t)$, $N_2(t)$ er antall individer av hver art ved tiden t.

Vi lar

$$x(t) = N_1(t) - 300$$
$$y(t) = N_2(t) - 10\,000$$

b og c er positive konstanter, og vi har

$$x'(t) = by(t) \qquad y'(t) = -cx(t).$$

a) Art 1 (x, N_1) er rovdyr.

b) Vis at $x''(t) = -bcx(t)$.

Vi ser

$$x''(t) = (x'(t))' = (by(t))'$$
$$= by'(t) = -bcx(t).$$

c) Anta $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. Finn $x(t)$, $y(t)$.

Vi vet x tilfredsstiller

$$x'' = -bcx, \quad \text{altså} \quad x'' + bcx = 0,$$

Karakteristisk likning

$$r^2 + bc = 0, \qquad (bc > 0)$$

med komplekse løsninger $i\sqrt{bc}$.

Løsningen (se teorem 10.5.14):

$$x(t) = C\cos(\sqrt{bc}\,t) + D\sin(\sqrt{bc}\,t)$$

Fra oppgaven er

$$y(t) = \frac{1}{b}x'(t) = -\sqrt{\frac{c}{b}}\,C\sin(\sqrt{bc}\,t) + \sqrt{\frac{c}{b}}\,D\cos(\sqrt{bc}\,t)$$

De generelle løsningene er da

$$\left(\frac{1}{b}\cos(\sqrt{bc}\,t)\right)' \qquad x(t) = C\cos(\sqrt{bc}\,t) + D\sin(\sqrt{bc}\,t)$$

$$-\frac{\sqrt{bc}}{b}\sin(\sqrt{bc}\,t) \qquad y(t) = -\sqrt{\frac{c}{b}}\,C\sin(\sqrt{bc}\,t) + \sqrt{\frac{c}{b}}\,D\cos(\sqrt{bc}\,t)$$

$$-\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}\sin(\sqrt{bc}\,t) \qquad x(0) = x_0 = C$$

$$y(0) = y_0 = \sqrt{\frac{c}{b}}\,D, \quad D = \sqrt{\frac{b}{c}}\cdot y_0.$$

Når vi setter inn dette er løsningen

$$x(t) = x_0\cos(\sqrt{bc}\,t) + \sqrt{\frac{b}{c}}\,y_0\sin(\sqrt{bc}\,t)$$

$$y(t) = -\sqrt{\frac{c}{b}}\,x_0\sin(\sqrt{bc}\,t) + y_0\cos(\sqrt{bc}\,t).$$

d) $N_1(0) = 300$, $N_2(0) = 1400$.

$x_0 = 0$, $y_0 = -8600$.

$b = 0.05$

$c = 84$.

Kalkulus 10.6

2 a) Finn generell løsning av
$$y'' - 2y' - 8y = 0.$$
Den karakteristiske likningen er
$$r^2 - 2r - 8 = 0,$$
og har løsningene $r_1 = 4$, $r_2 = -2$.
Den generelle løsningen er da
$$y_h(x) = Ce^{4x} + De^{-2x}.$$

b) Finn en partikulær løsning av
$$y'' - 2y' - 8y = 6 - 8x$$
Vi bruker regel 1 og gjetter på
$y_p(x) = Ax + B.$
$y_p'(x) = A$
$y_p''(x) = 0$, så vi ønsker
$$0 - 2A - 8(Ax + B) = 6 - 8x.$$
$$-8Ax + (-2A - 8B) = 6 - 8x. \qquad \begin{matrix} -8A = -8 \\ -2A - 8B = 6 \end{matrix}$$
$A = 1$, og $B = -1$.
$$y_p(x) = x - 1.$$

c) Den generelle løsningen er da
$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$
$$= Ce^{4x} + De^{-2x} + x - 1.$$
Vi vil løse med betingelsene $y(1) = 0$
$y'(1) = 1.$
$$y'(x) = 4Ce^{4x} - 2De^{-2x} + 1,$$
og dermed blir likningssystemet
$$Ce^4 + De^{-2} + 0 = 0$$
$$4Ce^4 - 2De^{-2} + 1 = 1$$
Vi ser altså at $C = 0$, $D = 0$
og løsningen vår er
$$y(x) = x - 1.$$

6 Finn den generelle løsningen til

$y'' + 2y' + 5y = \cos x.$

Homogen løsning:

$r^2 + 2r + 5 = 0$

$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm i2$

Ved teorem 10.5.14:

$y_h(x) = e^{-x}(C\cos(2x) + D\sin(2x))$

Inhomogen løsning:

$y_p(x) = A\cos x + B\sin x$ (regel 3)

$y_p'(x) = -A\sin x + B\cos x$

$y_p''(x) = -A\cos x - B\sin x$

Vi setter inn:

$y_p'' + 2y_p' + 5y$

$= -A\cos x - B\sin x - 2A\sin x + 2B\cos x + 5A\cos x + 5B\sin x$

$= (-A + 2B + 5A)\cos x + (-B - 2A + 5B)\sin x$

$= (4A + 2B)\cos x + (4B - 2A)\sin x \overset{\text{ønsker}}{=} \cos x$

Da må

$4A + 2B = 1 \qquad 4B - 2A = 0$

$\leftarrow 2B = A$

$4A + A = 1$

$A = \frac{1}{5} \longrightarrow B = \frac{1}{10}$

Dermed får vi partikulærløsningen

$y_p(x) = \frac{1}{5}\cos x + \frac{1}{10}\sin x$

Den generelle løsningen er

$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

$= e^{-x}(C\cos(2x) + D\sin(2x)) + \frac{1}{5}\cos x + \frac{1}{10}\sin x$

(7) Løs differensiallikningen

$$y'' - 8y' + 6y = x^2.$$

Homogenløsning:

$$r^2 - 8r + 6 = 0$$

$$r = \frac{8 \pm \sqrt{64-24}}{2} = 4 \pm \sqrt{10}$$

Den generelle løsningen er

$$y_h(x) = Ce^{(4+\sqrt{10})x} + De^{(4-\sqrt{10})y}.$$

Partikulærløsning:

Gjetter på $y_p(x) = Ex^2 + Fx + G$ (regel 1).

$$y_p'(x) = 2Ex + F$$

$$y_p''(x) = 2E$$

Setter inn:

$$y_p''(y) - 8y_p'(x) + 6y_p(x)$$

$$= 2E - 8(2Ex + F) + 6(Ex^2 + Fx + G)$$

ønsker

$$= (6E)x^2 + (6F - 16E)x + (6G - 8F + 2E) = x^2$$

Da må

$$6E = 1$$

$$6F - 16E = 0$$

$$6G - 8F + 2E = 0$$

Vi får $E = \frac{1}{6}$, $F = \frac{4}{9}$, $G = \frac{29}{54}$.

Løsningen er

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

$$= Ce^{(4+\sqrt{10})x} + De^{(4-\sqrt{10})x} + \frac{1}{6}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{29}{54}.$$

Kalkulus 10.4

13 a) Finn nullpkt., makspkt. og vendepkt. for

$h(t) = e^{-0.1t} - e^{-0.3t}$.

$h(t) = 0$ ser vi at $t = 0$. Eneste nullpkt

$h'(t) = -0.1e^{-0.1t} + 0.5e^{-0.5t}$.

$h'(t) = 0$ når $0.1e^{-0.1t} = 0.5e^{-0.5t}$.

gir $t = \frac{\ln 5}{0.4}$. Sjekk at maks!

$h''(t) = 0.01e^{-0.1t} - 0.25e^{-0.5t}$

$h''(t) = 0$ når $0.01e^{-0.1t} = 0.25e^{-0.5t}$

gir $t = \frac{\ln 25}{0.04}$.

c) Vi sprøyter inn 10 enheter av et stoff i blodet. $g(t)$ er antall enheter i blodet t timer etter innsprøyting, og $f(t)$ er antall enheter som ennå ikke er i blodet.

Vi setter opp likningene

$$\frac{df(t)}{dt} = -kf(t) \qquad \frac{dg(t)}{dt} = kf(t) - lg(t)$$

der k, l er pos. konstanter, $k \neq l$.

La $f(0) = 10$, $g(0) = 0$ og løs systemet

$f' = -kf$, og da vet vi at

$f(t) = Ce^{-kt}$.

Siden $f(0) = Ce^0 = C = 10$ er da

$f(t) = 10e^{-kt}$.

$g'(t) = kf(t) - lg(t) = k10e^{-kt} - lg(t)$.

Vi får likningen

$g'(t) + lg(t) = k10e^{-kt}$.

Vi bruker setning 10.1.3:

$$g(t) = e^{-lt}\left(\int e^{lt} k10e^{-kt}\,dt + C\right)$$

$$= e^{-lt}\left(10k\int e^{(l-k)t}\,dt + C\right)$$

$$= e^{-lt}\left(\frac{10k}{l-k}e^{(l-k)t} + C\right)$$

$$= \frac{10k}{l-k}e^{-kt} + Ce^{-lt}.$$

Vi ønsker $g(0) = 0$, som gir $C = -\frac{10k}{l-k}$, og da er

$$g(t) = \frac{10k}{l-k}\left(e^{-kt} - e^{-lt}\right)$$

$$f(t) = 10e^{-kt}.$$