Kompendiet 11.2

(3) Vi vil numerisk derivere $f(x)=e^x$ i $a=1$ vha. Newtons kvotient.

Tilnærmingen for en gitt h er

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \approx f'(a)$$

a) Programmér, med $h = 10^{-4}, 10^{-5}, \ldots, 10^{-12}$.

Ser at beste feil er $h \approx 10^{-8}$.

b) Lemma 11.13 sier at den besteverdien til h er omtrent

$$h^* \approx 2\frac{\sqrt{\epsilon^* |f(a)|}}{\sqrt{|f''(a)|}}$$

Her er $\epsilon^* = 7\cdot 10^{-17}$, $f(a)=e$, $f''(a)=e$, så

$$h^* \approx 2\frac{\sqrt{7\cdot 10^{-17}\cdot e}}{\sqrt{e}} \approx 1.67\cdot 10^{-8}.$$

4 Vi ønsker å estimere feilen vi gjør ved å sette $f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

I kompendiet:

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(c) \quad c \in (a, a+h)$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) + \frac{h}{2} f''(c)$$

a) Vi lager Taylorpolynomer av grad 2 om a

$$T_2 f(y) = f(a) + f'(a)(y-a) + \frac{1}{2} f''(a)(y-a)^2$$

$$R_2 f(y) = \frac{1}{6} f'''(c)(y-a)^3 \quad c \in (a, y).$$

Evaluerer i $y = a+h$:

$$f(a+h) = T_2 f(a+h) + R_2 f(a+h)$$

$$= f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \frac{h^3}{6} f'''(c) \quad c \in (a, a+h)$$

Vi rydder og får

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) + \frac{h}{2} f''(a) + \frac{h^2}{6} f'''(c)$$

$$\left| \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) \right| = \left| \frac{h}{2} f''(a) + \frac{h^2}{6} f'''(c) \right|$$

Vi ser at feilen da er

$$\left| \frac{h}{2} f''(a) + \frac{h^2}{6} f'''(c) \right| \leq \frac{h}{2} |f''(a)| + \frac{h^2}{6} |f'''(c)|$$

$$\leq \frac{h}{2} |f''(a)| + \frac{h^2}{6} \max_{x \in [a, a+h]} |f'''(x)|$$

Til sammenligning, (11.2) i kompendiet: $\leq \frac{h}{2} \max_{x \in [a, a+h]} |f''(x)|$

b) Bruk et konstant Taylorpolynom (grad 0)

På samme måte som over får vi

$$f(a+h) = f(a) + hf'(c) \quad c \in (a, a+h).$$

Dette er umulig, $f'(a)$ opptrer ikke her.

c) Laveregradspolynomer virker ikke, og den høyere gir et mer komplisert feilestimat som krever flere deriverte av f.

6 a) Vi lager tilnærming til $f''(0)$ med formelen $\frac{(f(h)-2f(0)+f(-h))}{h^2}$.

Når er dette eksakt?

Lett svar:

T11.19 sier at feilen er begrenset av

$$\frac{h^2}{12}\max_{x\in[a-h,a+h]}|f^{(iv)}(x)|$$

antyder tredjegradspolynom.

Anta at f er et polynom av grad 3.

$$f(x)=a+bx+cx^2+dx^3$$
$$f'(x)=b+2cx+3dx^2$$
$$f''(x)=2c+6dx$$
$$f'''(x)=6d$$
$$f^{(iv)}(x)=0$$

Det betyr at

$$f(x)=T_3f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(0)+\frac{x^3}{6}f'''(0).$$

Da er

$$f(h)-2f(0)+f(-h)$$
$$=\cancel{f(0)}+\cancel{hf'(0)}+\frac{h^2}{2}f''(0)+\cancel{\frac{h^3}{6}f'''(0)}-2\cancel{f(0)}$$
$$+\cancel{f(0)}-\cancel{hf'(0)}+\frac{h^2}{2}f''(0)-\cancel{\frac{h^3}{6}f'''(0)}$$
$$=2\frac{h^2}{2}f''(0)=h^2f''(0).$$

Men vi beregner jo

$$\frac{f(h)-2f(0)+f(-h)}{h^2}=\frac{h^2f''(0)}{h^2}=f''(0),$$

og metoden er eksakt for tredjegradspolynomer.

6 b) Begrens feilen i

$$\left| f''(0) - \frac{f(h) + 2f(0) + f(-h)}{h^2} \right|$$

Vi gjør en Taylorutvikling av orden 3 om 0.

$$f(x) = T_3 f(x) + R_3 f(x)$$

$$= f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{6} f'''(0) + \frac{x^4}{24} f^{(iv)}(c)$$

der $c \in (0, x)$

$$f(h) - 2f(0) + f(-h)$$

$$= \cancel{f(0)} + \cancel{h f'(0)} + \frac{h^2}{2} f''(0) + \cancel{\frac{h^3}{6} f'''(0)} + \frac{h^4}{24} f^{(iv)}(c_1)$$

$$\cancel{-2f(0)}$$

$$+ \cancel{f(0)} \cancel{- h f'(0)} + \frac{h^2}{2} f''(0) \cancel{- \frac{h^3}{6} f'''(0)} + \frac{h^4}{24} f^{(iv)}(c_2)$$

der $c_1 \in (0, h)$, $c_2 \in (0, -h) = (-h, 0)$

$$f(h) - 2f(0) + f(-h) = h^2 f''(0) + \frac{h^4}{24}\left(f^{(iv)}(c_1) + f^{(iv)}(c_2)\right)$$

$$\left| f''(0) - \frac{f(h) - 2f(0) + f(-h)}{h^2} \right|$$

$$= \left| \frac{h^3}{24}\left(f^{(iv)}(c_1) + f^{(iv)}(c_2)\right) \right|$$

La $M = \max_{x \in [-h, h]} |f^{(iv)}(x)|$

så

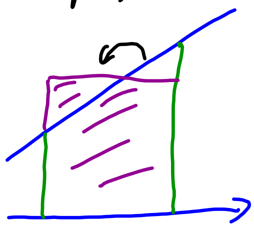
$$\left| \frac{h^2}{24}\left(f^{(iv)}(c_1) + f^{(iv)}(c_2)\right) \right| \leq \frac{h^2}{24}(M + M)$$

$$= \frac{h^2}{12} M = \frac{h^2}{12} \max_{x \in [-h, h]} |f^{(iv)}(x)|.$$

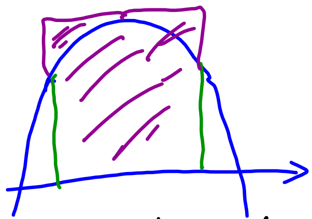
Kompendiet 12.2

1. a) Er avrundingsfeil fra subtraksjon et stort problem i midtpunktsmetoden? Nei

b) Er midtpunktsmetoden eksakt for 1.-gradspolynomer? Ja



c) Er midtpunktsmetoden eksakt for 2. gradspolynomer? Nei



d) Global feil i midtpunktsmetoden er en orden lavere enn lokal feil. Ja

e) Når vi minker steglengden i midtpunktsmetoden med en faktor 3 blir redusert cirka med en faktor 9. Ja

Feilen er $(b-a)\frac{h^2}{24}\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$.

Anta h_1 og $h_2 = \frac{h_1}{3}$ er gitt.

Feilen med $h=h_2$ er da

$$(b-a)\frac{h_2^2}{24}\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$$

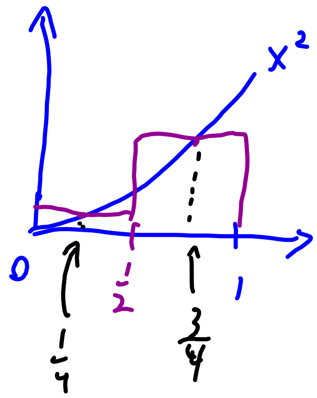
$$=\left(\frac{h_1}{3}\right)^2(b-a)\frac{1}{24}\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$$

$$=\underset{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3^2}}\underbrace{(b-a)\frac{h_1^2}{24}\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|}_{\text{feilen med } h=h_1}$$

② Bruk midtpunktsregelen til å tilnærme

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

med 2^0 delintervaller.



$$I_{mid} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{5}{16}}}.$$

③ Med 6 delintervaller, tilnærm

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx$$

med midtpunktmetoden.

Vi deler $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ i 6 intervaller med lengde $\frac{\pi}{12}$:

$$\left[0, \frac{\pi}{12}\right], \left[\frac{\pi}{12}, \frac{2\pi}{12}\right], \ldots, \left[\frac{5\pi}{12}, \underbrace{\frac{6\pi}{12}}_{\frac{\pi}{2}}\right]$$

Midtpunktene er

$$\frac{\pi}{24}, \frac{3\pi}{24}, \frac{5\pi}{24}, \ldots, \frac{11\pi}{24}.$$

Da er

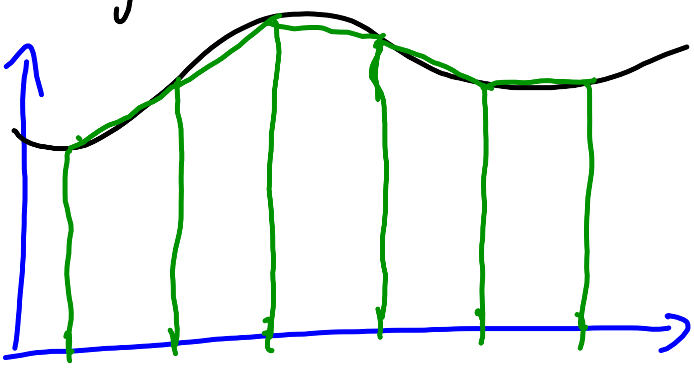
$$I_{mid} = \frac{\pi}{12}\cdot\left(f\left(\frac{\pi}{24}\right) + f\left(\frac{3\pi}{24}\right) + \cdots + f\left(\frac{11\pi}{24}\right)\right),$$

der $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$

$$I_{mid} = 0.530624$$

Kompendiet 12.3

Trapesregelen:



Tilnærmer med arealet av trapesene.

1 a) Trapesmetoden er vanligvis mer presis enn midtpunktregelen. Nei

I kompendiet gis dobbelt så stor feilbegrensning for trapesmetoden.

b) Siden målepunktene i trapesmetoden brukes i to forskjellige intervaller må vi evaluere f to ganger i hvert punkt. Nei

Det går an å skrive om uttrykkene slik at vi slipper dette, se Teorem 12.10.