$f$ der. på $[a,b]$, uniformpartisjon $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ med steglengde $h$. La $M = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.

Feil i midtpunkt:

$$|I - I_{mid}| \leq (b-a)\frac{h^2}{24}M$$

Feil i trapesmetoden:

$$|I - I_{trap}| \leq (b-a)\frac{h^2}{12}M$$

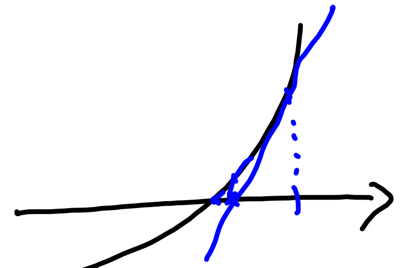
dobbelt så stor

[Kompendiet s. 311]

# Eksamen 2014

## Del 1

7. Ta to steg med Newtons metode for $f(x)=x^2-2$, og start i $x_0=1$.



Tangenten i punktet $(x_k, f(x_k))$ med stigningstall $f'(x_k)$:

$$y(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)$$

$y(x)=0$ hvis

$$f'(x_k)(x-x_k)=-f(x_k)$$

som gir

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

For oss er

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^2-2}{2x_k}$$

$$x_0=1$$

$$x_1=1-\frac{1^2-2}{2\cdot 1}=\frac{3}{2}$$

$$x_2=\frac{3}{2}-\frac{(\frac{3}{2})^2-2}{2\cdot\frac{3}{2}}=\underline{\underline{\frac{17}{12}}}$$

(8) Riktig alt:

C: Den symmetriske Newton-kvotienten gir den deriverte eksakt for alle annengradspolynomer. [ignorerer avrunding]

Symm. Newton-kvotient:

$$\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$

ikke bland med $\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}$ som $\approx f''(a)$

Annengradspolynom

$$p(x)=bx^2+cx+d$$

$$p'(x)=2bx+c, \quad p'(a)=2ba+c$$

$$\frac{p(a+h)-p(a-h)}{2h}=\frac{ba^2+2bah+bh^2+ca+ch+d}{2h}-\frac{ba^2-2bah+bh^2+ca-ch+d}{2h}$$

$$=2ba+c.$$

Del 2

1) Vis at for $n \geq 1$ er

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$$

La $P_n$ være induksjonspåstanden.

$P_1$ er sann: Sett inn $n=1$ på begge sider, da får vi $-1=-1$.

Anta nå at $P_n$ er sann. Da vil vi vise

$$P_{n+1}: \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k^2 = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Ser:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 + (-1)^{n+1} (n+1)^2$$

$$\underset{\text{ved } P_n}{=} (-1)^n \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+1} (n+1)^2$$

$$= (-1)^n (n+1) \left( \frac{n}{2} - (n+1) \right)$$

$$= (-1)^n (n+1) \left( \frac{n}{2} - \frac{2n+2}{2} \right)$$

$$= (-1)^n (n+1) \left( \frac{-n-2}{2} \right)$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Og induksjonsbeviset er fullført.

qed

② Vis at differensligningen

$$6x_{n+2}-5x_{n+1}+x_n = 4^{-n} \qquad x_0=0,\ x_1=-\tfrac{2}{3}$$

har løsning $x_n = 8(4^{-n}-3^{-n})$.

Vi løser den homogene ligningen

$$6x_{n+2}-5x_{n+1}+x_n=0.$$

Karakteristisk polynom er

$$6r^2-5r+1=0,$$

så $r=\dfrac{5\pm\sqrt{25-24}}{6\cdot 2}=\dfrac{5\pm 1}{12}$

De to røttene er da

$$r_1=\frac{5+1}{12}=\frac{1}{2},\quad r_2=\frac{5-1}{12}=\frac{1}{3}.$$

Så den homogene løsningen er:

$$x_n^h = C\left(\tfrac{1}{2}\right)^n + D\left(\tfrac{1}{3}\right)^n.$$

Vi søker en partikulærløsning $x_n^p = A\,4^{-n}$.

Hvis vi setter inn i differensligningen:

$$6A4^{-n-2}-5A4^{-n-1}+A4^{-n}=4^{-n} \ \big|\cdot 4^n$$

$$\frac{6A}{4^2}-\frac{5A}{4}+A=1$$

$$A\left(\frac{6}{16}-\frac{5}{4}+1\right)=1$$

$$A=\frac{16}{2}=8.$$

Vi har funnet den generelle løsningen:

$$x_n = x_n^h + x_n^p = C\left(\tfrac{1}{2}\right)^n + D\left(\tfrac{1}{3}\right)^n + 8\cdot 4^{-n}$$

Vi må nå ta hensyn til $x_0=0,\ x_1=-\tfrac{2}{3}$

$$x_0 = 0 = C+D+8$$

$$x_1 = -\tfrac{2}{3} = \frac{C}{2}+\frac{D}{3}+2$$

$$-4 = 3C+2D+12 \qquad D=-8-C$$

$$3C+2D=-16$$

$$3C-16-2C=-16$$

$$C=0 \qquad D=-8.$$

Så løsningen på differensligningen med initialbetingelser er

$$x_n = -8\left(\tfrac{1}{3}\right)^n + 8\,4^{-n}$$

$$=8(4^{-n}-3^{-n}).$$

Hva skjer for store $n$ når denne differensligningen simuleres på datamaskin m/ 64-bits flyttall

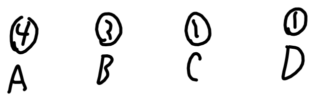
Datamaskinen vil i stedet beregne

$$\tilde{x}_n = \epsilon_1 2^{-n} + (-8+\epsilon_2)3^{-n} + 8\cdot 4^{-n}$$

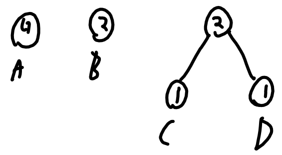
Dette vil gå mot 0 når $n\to\infty$, siden alle leddene går mot 0

3. Gitt teksten ABCDAABA. Skriv opp et Huffman-tre, og skriv opp Huffman-koden. Hvor mange bits per symbol bruker koden?

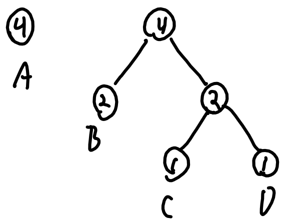
Frekvensene er
$f(A)=4,\ f(B)=2,\ f(C)=1,\ f(D)=1.$



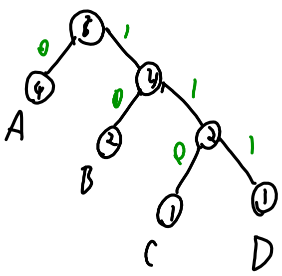

Slå sammen C og D:




Slå sammen B-noden med treet til høyre




Slå sammen igjen:




Kodene er:

$c(A)=0$

$c(B)=10$

$c(C)=110$

$c(D)=111$

Dermed er

ABCDAABA

$\downarrow c$

0 10 110 111 0 0 10 0

14 bits, så vi har brukt $\frac{14}{8}=1.75$ bits per symbol.

(4) a) Skriv opp Taylor-polynomet av grad $n$, $T_n(x)$, til funksjonen $f(x)=e^x$ om punktet 0. Skriv også opp restleddet.

Vi vet at
$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k$$

Men $f^{(n)}(x)=e^x$ for alle $n$, så
$$f^{(n)}(0)=1 \text{ for alle } n.$$

Da er
$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

Restleddet er
$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c \quad \text{der } c\in(0,x)$$

b) Bruk oppgave a) til å regne ut $\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$ med nøyaktighet på 0.01.

$$e^x=T_n(x)+R_n(x)$$

Da er
$$e^{-t^2}=T_n(-t^2)+R_n(-t^2).$$

Vi setter inn i integralet:
$$\int_0^1 e^{-t^2}dt=\int_0^1\left(T_n(-t^2)+R_n(-t^2)\right)dt$$
$$=\int_0^1\left(\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{t^{2k}}{k!}\right)+(-1)^{n+1}e^{c(t)}\frac{t^{2n+2}}{(n+1)!}\right)dt$$
der $c(t)\in(0,-t^2)$
$$=\underbrace{\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{t^{2k}}{k!}\right)dt}_{\text{Tilnærming}}+\underbrace{\int_0^1(-1)^{n+1}e^{c(t)}\frac{t^{2n+2}}{(n+1)!}\,dt}_{\text{Feil}}$$

Vi ønsker å begrense feilen i absoluttverdi.

Observasjon: For alle $t$ er $c(t)\in(0,-t^2)$, altså $c(t)<0$, så
$$|e^{c(t)}|\le e^0=1.$$

Vi ser på feilen:
$$\left|\int_0^1(-1)^{n+1}e^{c(t)}\frac{t^{2n+2}}{(n+1)!}dt\right|$$
$$\le\int_0^1\left|(-1)^{n+1}e^{c(t)}\frac{t^{2n+2}}{(n+1)!}\right|dt$$
$$=\int_0^1\left|e^{c(t)}\frac{t^{2n+2}}{(n+1)!}\right|dt$$
$$\le\int_0^1|e^{c(t)}|\left|\frac{t^{2n+2}}{(n+1)!}\right|dt$$
$$\le\int_0^1\left|\frac{t^{2n+2}}{(n+1)!}\right|dt=\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{(n+1)!}dt$$
$$=\left[\frac{t^{2n+3}}{(n+1)!(2n+3)}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{(n+1)!(2n+3)}$$

Når vi bruker et Taylorpolynom av grad $n$ er feilen $\le\frac{1}{(n+1)!(2n+3)}$. Vi ønsker $\le 0.01$

Da må $(n+1)!(2n+3)\ge 100$.

| $n$ | $(n+1)!(2n+3)$ |
| --- | --- |
| 1 | 10 |
| 2 | 42 |
| 3 | 216 |

Dermed setter vi $n=3$. Tilnærmingen bl.
$$\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\frac{t^{2k}}{k!}\right)dt=\int_0^1\left(1-\frac{t^2}{1}+\frac{t^4}{2}-\frac{t^6}{6}\right)dt$$
$$=\left[t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{10}-\frac{t^7}{42}\right]_0^1$$

(5) Vi har differensialligningen

$$x' - (1+t)x = 1+t \qquad x(0) = 0$$

a) Finn en formel for løsningen.

Denne er separabel:

$$x' = (1+t) + (1+t)x$$
$$= (1+t)(1+x)$$

$$\frac{x'}{1+x} = 1+t \qquad \text{vi mister } x = -1 \text{ her.}$$

Substitusjon, se Kalkulus

$$\int \frac{x'}{1+x}\,dt = \int (1+t)\,dt = t + \frac{t^2}{2} + C_1$$
$$\parallel$$
$$\int \frac{1}{1+x}\,dx = \ln|1+x|$$

$$\ln|1+x| = t + \frac{t^2}{2} + C_1 \qquad \text{Tar } e^{[\text{begge sider}]}$$

$$|1+x| = e^{C_1} e^{t+\frac{t^2}{2}}$$
$$1+x = \pm e^{C_1} e^{t+\frac{t^2}{2}}$$
$$x = C_2 e^{t+\frac{t^2}{2}} - 1 \qquad \text{der } C_2 \in \mathbb{R}$$

(må sjekke $C_2 = 0$ ok)

$x(0) = 0$:

$$C_2 - 1 = 0, \quad C_2 = 1.$$

Løsningen er

$$x(t) = e^{t+\frac{t^2}{2}} - 1.$$

b) Finn to tilnærminger til løsningen i $t = 0.25$ med Eulers metode og midtpunktsmetode (ett steg). Sammenlikn med eksakt løsning.

$$x' = (1+t)(1+x)$$
$$f(t,x) = (1+t)(1+x).$$

Eulers metode gir

$$x_1 = x_0 + h f(t_0, x_0)$$
$$= 0 + 0.25(1+0)(1+0) = 0.25$$

Eulers midtpunktsmetode gir

$$x_{1/2} = y_0 + \frac{h}{2} f(t_0, x_0) = 0.125$$

$$x_1 = x_0 + h f(t_{1/2}, x_{1/2})$$
$$= 0 + 0.25(1+0.125)(1+0.125)$$
$$\approx 0.3164.$$

Den eksakte løsningen er $\approx 0.32478$

Avvik Euler: 0.07478

Avvik Euler-midt: 0.00837.

Dette stemmer med teorien, midtpunktsmetoden har et bedre feilestimat (orden 2)