Differensligninger

1. orden. $x_{n+1} = 2x_n$

2. orden (*) $\boxed{x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = 0}$, $x_0 = a_0$, $x_1 = a_1$

$b, c \in \mathbb{R}$ $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$.

Fibonacci $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$

For å løse (*):

Se på kar. lign. $\boxed{r^2 + br + c = 0}$ (**)

Hvis r løser (**) er r^n en løsning av (*)

Tre tilfeller:

i) Hvis (**) har to reelle løsn. r_1 og r_2

er generell løsn av (*)

$$\boxed{x_n = C r_1^n + D r_2^n}, \quad C, D \in \mathbb{R}$$

ii) Hvis (**) har en reell løsning r

er generell løsning av (*)

$$\boxed{x_n = (C + Dn) r^n}, \quad C, D \in \mathbb{R}$$

iii) Hvis (**) har komplekse konj. løsn.

r og $\bar{r}$ med $\boxed{r = \rho e^{i\theta}}$

så er generell løsning av (*)

$$\boxed{x_n = \rho^n (C \cos n\theta + D \sin n\theta)}$$

Eksempel

$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0 \qquad , \qquad x_1 = 1, \; x_2 = 1$

Kar. ligning $\quad r^2 - r - 1 = 0$

$$r = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Generell løsn. $\quad x_n = C\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n + D\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Startverdier:

$$1 = x_1 = C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$1 = x_2 = C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

Gir til slutt

$$x_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

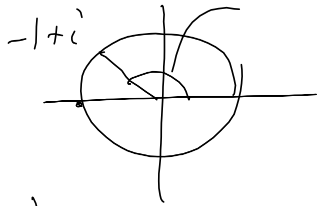
Eksempel

$$x_{n+2} + 2x_{n+1} + 2x_n = 0 \quad , \quad x_0 = 1, \ x_1 = 2$$

Kar. ligm. $\quad r^2 + 2r + 2 = 0$

$$r = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$$

$$r = -1 + i \quad , \quad \bar{r} = -1 - i$$



$$\theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$r = \rho e^{i\theta} \quad , \quad \rho = \sqrt{2}$$

$$x_n = \rho^n (C \cos n\theta + D \sin n\theta)$$

$$= (\sqrt{2})^n \left(C \cos \frac{3\pi n}{4} + D \sin \frac{3\pi n}{4} \right)$$

$$1 = x_0 = 1 \cdot (C \cdot 1 + D \cdot 0) \quad , \quad C = 1$$

$$2 = x_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + D \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$D = 3 \qquad x_n = (\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{3\pi n}{4} + 3 \sin \frac{3\pi n}{4} \right).$$

Inhomogene differensligninger

$(*)\ x_{n+2} + b\,x_{n+1} + c\,x_n = f(n)\ ,\quad b,c \in \mathbb{R}$

Lemma Anta at x_n^p er en løsning av $(*)$. Da er alle andre løsninger på formen $x_n = x_n^p + x_n^h$

der x_n^h er en vilkårlig løsning av

$$x_{n+2} + b\,x_{n+1} + c\,x_n = 0.$$

Eks. $x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n = -6n + 1$

Hvordan finne en løsning?

Prøv med løsning på samme form som høyresiden.

$x_n^p = An + B$ ~ polynom av grad 1 i n.

$x_{n+1}^p = A(n+1) + B$

$x_{n+2}^p = A(n+2) + B$

$\Rightarrow x_{n+2}^p - x_{n+1}^p - 6x_n^p = A(n+2) + B - A(n+1) - B - 6An - 6B$

$= -6An + A - 6B = -6n + 1$ for alle n.

$-6A = -6, \quad A - 6B = 1$

$A = 1, \quad 1 - 6B = 1, \quad B = 0$

$x_n^p = An + B = n$

General solution of the homogenous equation $x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n = 0$ is

$x_n^h = C(-2)^n + D\,3^n$

The general solution of the inhomog. equation is

$x_n = C(-2)^n + D \cdot 3^n + n$

General difference equations.

Recall Fibonacci equation

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \,, \qquad x_{-1} = x_0 = 1$$

$$x_{n+2} = -b\, x_{n+1} - c\, x_n \,, \qquad x_0 = a_0,\ x_1 = a_1$$

General second order difference equation:

$$x_{n+2} = F(n, x_n, x_{n+1})$$

Ex. $x_{n+2} = \cos n + (\ln x_n)\, x_{n+1}$

How can we program a ~~general~~ linear second order difference equation?

Suppose the equation is

$$x_{n+2} = g(n) + f_0(n)\,x_n + f_1(n)\,x_{n+1}, \quad x_0 = a_0, \quad x_1 = a_1$$

for $i = 1, 2, 3, \dots, N$:

$$x_i = g(i-2) + f_0(i-2)\,x_{i-2} + f_1(i-2)\,x_{i-1}$$

print x_i

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \overset{x_{pp}}{x_3},\ \overset{x_p}{x_4},\ x_5,\ x_6,\ \dots$$

x

Alternative without list!

$x_{pp} = a_0;\ x_p = a_1$

for $i = 2, 3, \dots N$

$x = g(i-2) + f_0(i-2)\,x_{pp} + f_1(i-2)\,x_p$

print x

$x_{pp} = x_p$

$x_p = x$

Example:

$$x_{n+2} - \frac{19}{3} x_{n+1} + 2x_n = -10, \quad x_0 = 2, x_1 = 8/3$$

Final solution $x_n = 3 - 3^{-n}$