Inhomogene differensligninger

Minner om

$$(*)\quad x_{n+2} + b\,x_{n+1} + c\,x_n = f(n)\ ,\quad b,c \in \mathbb{R}$$

Generell løsning er gitt ved

$$x_n = x_n^p + x_n^h$$

der x_n^p er én løsning av $(*)$ og x_n^h er den generelle løsningen av

$$x_{n+2} + b\,x_{n+1} + c\,x_n = 0$$

For å finne x_n^p: Prøv med løsning på samme form som $f(n)$.

Ex. $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = n^2+1$, $x_0 = 10$, $x_1 = 0$

Homogen lign: $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$

Karakt. lign: $r^2 - 4r + 4 = 0$

$$r = 2 \pm \sqrt{2^2 - 4} = 2$$

Generell løsning av homogen ligning:

$$x_n^h = C \cdot 2^n + D \cdot n \cdot 2^n$$

Partikulær løsning: Prøver med

$x_n^p = An^2 + Bn + C$, A, B, C skal bestemmes

$$x_{n+2}^p = A(n+2)^2 + B(n+2) + C$$

$$x_{n+1}^p = A(n+1)^2 + B(n+1) + C$$

$$= A(n^2+2n+1) + Bn + B + C$$

$$= An^2 + (2A+B)n + A + B + C$$

Setter inn i (*):

$$n^2+1 = x_{n+2}^p - 4x_{n+1}^p + 4x_n^p$$

$$= A(n+2)^2 + B(n+2) + C - 4(A(n+1)^2 + B(n+1) + C) + 4(An^2 + Bn + C)$$

$$= An^2 + (B-4A)n + C - 2B$$, for alle verdier av n.

Da må polynomene på hver side ha samme koeffisienter:

$1 = A$, $0 = B - 4A$, $1 = C - 2B$

Da er $A = 1$, $B = 4$, $C = 9$

$$x_n^p = n^2 + 4n + 9$$

Generell løsning av inhomogen ligning:

$$x_n = x_n^p + x_n^h = n^2 + 4n + 9 + C2^n + Dn2^n$$

Startverdier: $x_0 = 10$, $x_1 = 0$

$10 = x_0 = 9 + C \cdot 1 + D \cdot 0$, $C + 9 = 10$, $C = 1$

$0 = x_1 = 1 + 4 + 9 + C \cdot 2 + D \cdot 1 \cdot 2$

$2C + 2D = -14$, $\therefore 2D = 14 - 2C = -14 - 2 \cdot 1 = -16$

$D = -8$

$$x_n = n^2 + 4n + 9 + 2^n - 8n2^n$$

Ulike former for $f(n)$ - høyresiden

i) $f(n)$ er et polynom av grad ~~n~~ k:

Prøv med x_n^p som et generelt polynom av grad ~~n~~ k.

ii) $f(n)$ på formen $a^n P(n)$ der $a \in \mathbb{R}$ og P er et polynom av grad k.

Prøv med $x_n^p = a^n Q(n)$ der Q er et generelt polynom av grad k.

iii) $f(n)$ er på formen $b^n(A \sin(an) + B \cos(an))$

Prøv med

$$x_n^p = b^n(C \sin(an) + D \cos(an))$$

Noen ganger funker ikke dette. I tilfelle (i) og (ii) må vi da øke graden.

Hvordan dukker inhomogene ligninger opp?

Penger i banken: 2 % rente

x_n - beløp etter n år

$$x_{n+1} = x_n + 0.02\,x_n = 1.02\,x_n$$

Anta at du i tillegg sparer 1000 kr pr. år. Da får vi

$$x_{n+1} = x_n + 0.02x_n + 1000n$$
$$= 1.02\,x_n + 1000n$$

$$x_{n+1} - 1.02\,x_n = 1000n$$

Ex. $x_{n+1} - 2x_n = 2^n$

Prøver med partikulær løsning $x_n^p = A \cdot 2^n$

$x_{n+1}^p = A \cdot 2^{n+1} = 2A \cdot 2^n$

Setter inn:

$2^n = x_{n+1}^p - 2x_n^p = 2A \cdot 2^n - 2A \cdot 2^n = 0$

Altså er det ikke mulig at $x_n^p = A \cdot 2^n$ kan være en løsning.

Hvorfor? Homogen ligning $x_{n+1} - 2x_n = 0$

Generell løsning $x_n^h = A \cdot 2^n$

Det går ikke å ha x_n^p på samme form som x_n^h.

Løsning: Prøv med $x_n^p = An2^n$

Innsatt: $x_{n+1}^p = A(n+1)2^{n+1}$

$$2^n = x_{n+1}^p - 2x_n^p = A(n+1)2^{n+1} - 2An2^n$$
$$= 2^n(2A(n+1) - 2An) = 2^n(2A)$$

Likhet for alle n gir $2A = 1$, $A = 1/2$

$x_n^p = \frac{1}{2} n 2^n$, $x_n^h = C \cdot 2^n$

Generell løsning er

$$x_n = C \cdot 2^n + \frac{1}{2} n 2^n$$

Kunne prøvd med $x_n^p = (An + B)2^n$

$$= An2^n + B \cdot 2^n$$

Eks. 6.25 i kompendiet:

$$x_{n+2} - \frac{19}{3} x_{n+1} + 2x_n = -10, \quad x_0 = 2, \; x_1 = 8/3$$

Løser på vanlig måte:

Generell løsning er

$$x_n = 3 + C \cdot 3^{-n} + D \cdot 6^n$$

Tilpasser til startverdier:

$$x_n = 3 - 3^{-n}.$$

Hvis vi generer verdiene

$$x_{n+2} = -10 + \frac{19}{3} x_{n+1} - 2x_n, \quad x_0 = 2, \; x_1 = 8/3$$

på datamaskin

så ser vi at x_n først nærmer seg 3,
men så går det galt og etterhvert
blir den beregnede løsningen
vilkårlig stor!

Forklaring.

Ligningen vi simulerer på datamaskinen er

denne feilen er ikke kritisk

$$x_{n+2} - \left(\frac{19}{3} + \varepsilon_1\right) x_{n+1} + 2 x_n = -10, \quad x_0 = 2, \quad x_1 = 8/3 + \varepsilon_2$$

der $|\varepsilon_1| \sim 10^{-17}$, $|\varepsilon_2| \sim 10^{-17}$

denne er kritisk.