FORELESNING 24/11 - 2015

MATINF 1100 L : SJEKK SEMESTERSIDER !

NUMERISK LØSNING AV $P(X)=0$, HVOR $P(X)$ ER ET POLYNOM

VANLIGVIS SKRIVES $p(x) = a_0 + a_1 x$

ALTERNATIVT — " — $= b_0(1-x) + b_1 x$

$b_0 = a_0$ og $b_1 - b_0 = a_0$

ANNET GRADS: $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$= b_0(1-x)^2 + b_1 2(1-x)x + b_2 x^2$

GENERELT: $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} b_i \binom{n}{i} (1-x)^{n-i} x^i$

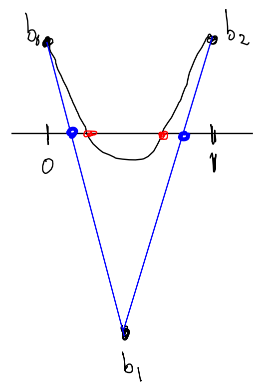
Bernstein form

For polynomer på Bernstein form kan man effektivt løse $p(x) = 0$ numerisk med metode utviklet av Mørken og Reimers

Eks polynom av grad 2

$p(x) = (1-x)^2 - 10(1-x)x + x^2$ Bernstein form med $b_0 = 1$, $b_1 = -5$, $b_2 = 1$

Løse $p(x) = 0$



polygonet som går gjennom $(0, b_0)$, $(\frac{1}{2}, b_1)$ og $(1, b_2)$ er en god tilnærming til $p(x)$

- har minst like mange nullpunkter
- nullpunktene ligger „nære" nullpunktene til $p(x)$

Bruker nullpunktene til polygonet som estimater på

nullpunktene til p(x), deretter "forfines" polygonet og prosessen gjentas

- enkel og effektiv algoritme - 2. ordens konvergens
- startverdier ikke nødvendig - fungerer alltid
- kan finne alle nullpunkter i ønsket intervall
- metoden finnes i Matlab

TAYLOR POLYNOMER MED RESTLEDD

Antar at $f(x)$ har $n+1$ kontinuerlig deriverte

Da er Taylor-polynomet av grad n i et punkt a

$$T_n(x) = f(a) + (x-a)\cdot f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}\cdot f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

Restleddet er gitt ved

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(\xi) \quad \text{der } \xi = \xi_x \in (a,x) \text{ når } x > a$$

Har at for enhver x så er

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

Eks: $f(x) = x^2$ La oss se på $T_1(x)$ omkring 0, altså $a=0$

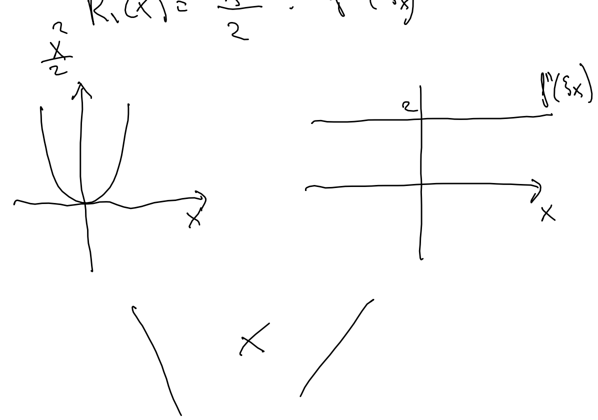
Da er $T_1(x) = 0 + (x-0)\cdot 0 = 0$

$$R_1(x) = \frac{(x-0)^2}{2}\cdot f''(\xi) = \frac{x^2}{2}\cdot f''(\xi)$$

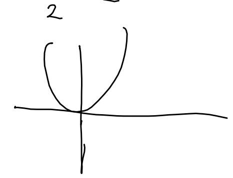
Vet at $f''(x) = 2$

La oss se på $R_1(x)$ geometrisk

$$R_1(x) = \frac{x^2}{2}\cdot f''(\xi_x)$$



$$\frac{x^2}{2}\cdot 2 = x^2$$



<u>Eks</u> $f(x) = x^3$, 1. ordens Taylor med $a = 0$

$$T_1(x) = 0 + 0 = 0$$

$$R_1(x) = \frac{x^2}{2} \cdot f''(\xi)$$

Har $f''(x) = 6x$. Da er $f''(\xi) = 6\xi$

Får

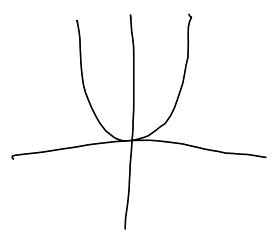
$$R_1(x) = \frac{x^2}{2} \cdot 6\xi \qquad \text{hvor } \xi = \xi_x \in (0, x)$$

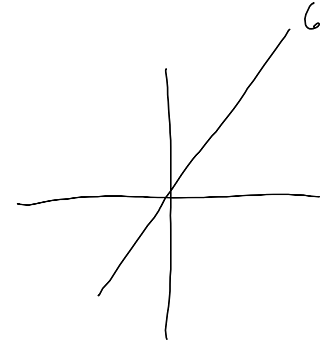
$$x^3 = f(x) = \underbrace{T_1(x)}_{=0} + R_1(x) = \frac{x^2}{2} \cdot 6\xi$$

Kan finne $\xi = \xi_x = \frac{x}{3}$

Grafisk: $R_1(x) = \frac{x^2}{2} \cdot 6\xi$

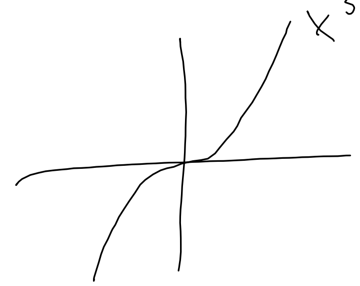
$6\xi = f''(\xi_x) = 2x$





$$\frac{x^2}{2} \cdot 6 \cdot \frac{x}{3} = x^3$$

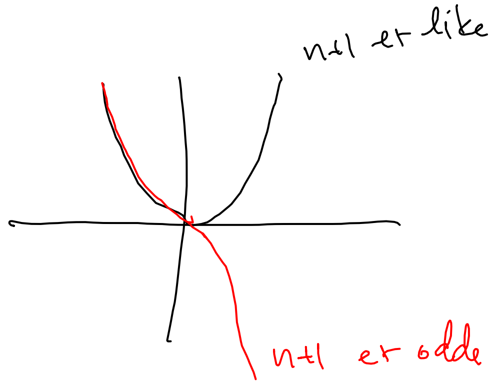
$x^3 = R_1(x)$



Generelt for $a = 0$

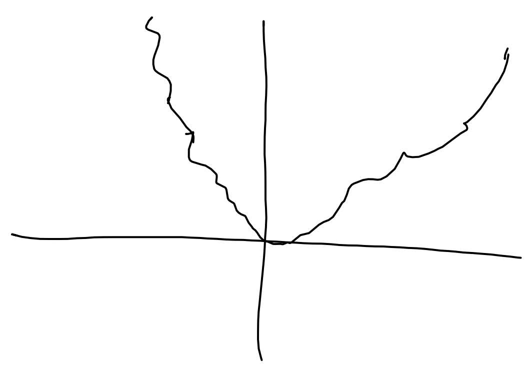
$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

hvor $\xi = \xi_x \in (a, x)$



$f^{(n+1)}(\xi_x) =$ funksjon av x

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\xi)$$



Eksamensoppgave 2012 – tekstoppgave 3

Gitt $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

① Finn $T_n(x)$ med $a=0$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$$

La oss først finne $f^{(k)}(x)$ for vilkårlig k

$$f(x) = (1+x)^{-1}$$

$$f'(x) = -1 \cdot (1+x)^{-2}$$

$$f''(x) = (-1)\cdot(-2)(1+x)^{-3} = 2(1+x)^{-3}$$

$$f'''(x) = -6(1+x)^{-4}$$

$$\boxed{f^{(k)}(x) = (-1)^k\, k!\, (1+x)^{-(k+1)}}$$

(Induksjon!)

$$\boxed{f^{(k)}(0) = (-1)^k\, k!}$$

Får da $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{\cancel{k!}} \cdot (-1)^k \cancel{k!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot x^k$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots + (-1)^n x^n$$

En geometrisk rekke.

(2) Hvor stor må n være for at absoluttfeilen skal bli mindre enn 0.001 for alle x i $[0, 0.5]$?

Må finne n s.a. $|R_n(x)| < 0.001$ for alle $x \in [0, 0.5]$

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad \text{for } \xi \in (0, x)$$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}(n+1)!\,(1+x)^{-(n+2)}$$

$$f^{(n+1)}(\xi) = (-1)^{n+1}(n+1)!\,(1+\xi)^{-(n+2)}$$

$$\Rightarrow R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{\cancel{(n+1)!}} \cdot (-1)^{n+1}\cancel{(n+1)!}\,(1+\xi)^{-(n+2)}$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+2}} \qquad \xi \in (0, x)$$

Må velge n s.a. $|R_n(x)| < 0.001$ for alle $x \in [0, 0.5]$

Blir størst for minst ξ, dvs. $\xi = 0$

$\Rightarrow |R_n(x)| < x^{n+1}$ for $x \in [0, 0.5]$

$\Rightarrow |R_n(x)| \leq 0.5^{n+1}$ krever at n er slik at dette er mindre enn 0.001

$0.5^{n+1} < 0.001$ tar naturlig log

$n+1 > 9.96$

$\Rightarrow n > 9$

Betyr at når $n = 9$ eller større blir feilen i $T_n(x)$ mindre enn 0.001