Numerisk løsning av diff.lign.

Noen løse tråder.

Vi har ligningen $x' = f(t,x)$, $x(0) = a$

Eksempler:

$x' = 2t$, Da er $f(t,x) = 2t$

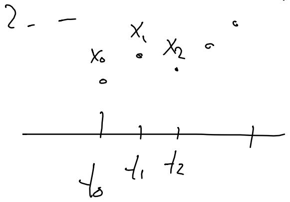
$x' = x$, Da er $f(t,x) = x$

$x' = 2t + x$, Da er $f(t,x) = 2t + x$

Eulers metode:

$$x_{k+1} = x_k + h\, f(t_k, x_k), \qquad x_0 = a,\ t_0 \text{ ergitt}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$



System av ligninger:

$x' = 2t$, $x(0) = 1$

$y' = x$, $y(0) = 1$

Dette kan vi løse med Euler:

$$x_{k+1} = x_k + h \cdot \underbrace{2t_k}_{f(t_k, x_k)}$$

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot x_k$$

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 2t_k \\ x_k \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + h\, \bar{f}(t_k, \bar{x}_k)}, \qquad \bar{f}(t, \bar{x}) = \begin{pmatrix} 2t \\ x \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}' = \bar{f}(t, \bar{x}), \quad \bar{x}(0) = \bar{a} \qquad \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Høyere ordens ligninger som et system av 1. ordens ligning.

Anta at vi har ligningen

$$(*) \quad x'' = t^2 + \sin(x + x'), \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$$

Denne kan løses med Eulers metode!

Vi innfører en ny funksjon $x_2 = x'$,

Da er $x_2' = x''$. Da blir $(*)$ til

$$(**) \quad x_2' = t^2 + \sin(x + x_2),$$

La oss også sette $x_1 = x$, $x_1' = x' = x_2$

$$(***) \quad \begin{aligned} x_1' &= x_2, & x_1(0) &= 1 \\ x_2' &= t^2 + \sin(x_1 + x_2), & x_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

Sett $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\bar{f}(t, \bar{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ t^2 + \sin(x_1 + x_2) \end{pmatrix}$

så kan $(***)$ skrives

$$\bar{x}' = \bar{f}(t, \bar{x})$$

Hvis vi bruker Euler på denne har vi en metode for å løse $(*)$

$$x_1' = t + x_2 \quad , \quad x_1(0) = 1$$

$$x_2' = x_1^2 + x_2 \qquad x_2(0) = 0$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad \bar{f}(t, \bar{x}) = \begin{pmatrix} t + x_2 \\ x_1^2 + x_2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}' = \bar{f}(t, \bar{x})$$

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + h\, \bar{f}(t_k, \bar{x}_k)$$

$$\begin{pmatrix} x_{k+1}^1 \\ x_{k+1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k^1 \\ x_k^2 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} t_k + x_k^2 \\ (x_k^1)^2 + x_k^2 \end{pmatrix}$$