Differensligninger og avrundingsfeil

Ex. 6.25 og seksjon 6.5.1 i komp.

$$x_{n+2} - \frac{19}{3} x_{n+1} + 2 x_n = -10, \quad x_0 = 2, \quad x_1 = 8/3.$$

Generell løsning:

$$x_n = 3 + C\, 3^{-n} + D\, 6^n$$

Startverdier gir $C = -1$ og $D = 0$

$$x_n = 3 - 3^{-n} \to 3 \quad \text{når } n \to \infty$$

Simulering: $x_n = -10 + \frac{19}{3} x_{n-1} - 2 x_{n-2} \quad x_0 = 2, \; x_1 = 8/3$

Beregner $x_2, x_3, x_4, \ldots$

Dette gir $\tilde{x}_{10} = 3{,}000012$

$\tilde{x}_{40} = 3{,}4 \cdot 10^{14}$.

Forklaring. Vi simulerer egentlig

$$x_n = -10 + \frac{19}{3} x_{n-1} - 2 x_{n-2}, \quad x_0 = 2, \; x_1 = 8/3 + \varepsilon$$

Løser vi dette med formel får vi

$$\tilde{x}_n = 3 - (1 - \hat{\varepsilon}) 3^{-n} + \hat{\varepsilon} 6^n$$

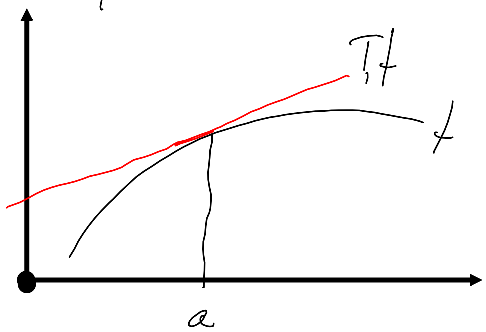
$\neq 0$, $\hat{\varepsilon} \approx 10^{-17}$

Taylor-polynomer.

I mange sammenhenger er det nyttig å kunne tilnærme en 'komplisert' funksjon med en 'enkel' funksjon.

Tangenten til f i et punkt a er en god tilnærming til f nær a.

Formel for tangenten:



$$T_1 f(x) = f(a) + (x-a) f'(a)$$

$$T_1 f(a) = f(a)$$

$$(T_1 f)'(x) = f'(a),$$

$$(T f)'(a) = f'(a)$$

Kan tangenten generaliseres?

Hva om vi tilnærmer f når a med et polynom av grad 2 ?

$$g(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2$$

Hvordan kan vi 'bruke' c_0, c_1, c_2?

Vi ønsker å plukke opp mer informasjon om f: funksjonsverdi, første- og andre derivert i a.

$$\boxed{g(a) = f(a), \quad g'(a) = f'(a), \quad g''(a) = f''(a)}$$

$$g'(x) = c_1 + 2c_2(x-a)$$

$$\boxed{g'(a) = c_1} \qquad \boxed{g(a) = c_0}$$

$$g''(x) = 2c_2$$

$$\boxed{g''(a) = 2c_2}$$

I: $g(a) = f(a)$ $\qquad c_0 = g(a) = f(a), \quad c_0 = f(a)$

II: $g'(a) = f'(a)$, $\qquad c_1 = g'(a) = f'(a), \quad c_1 = f'(a)$

III: $g''(a) = f''(a)$, $\qquad 2c_2 = g''(a) = f''(a), \quad c_2 = f''(a)/2$

$$g(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a)$$

er en parabel med samme funksjonsverdi og første to deriverte som f i a.

Taylorpolynom av grad n

$$T_n f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) + \dots + \frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a)$$

er Taylorpolynomet til f i a av grad n.

$$(T_n f)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Eks. 1. $f(x) = e^x$, $a=0$

$$(T_n f)(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) + \cdots + \frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a)$$

Vi har $f^{(k)}(x) = e^x$, $k=0,1,\ldots,\ldots$

$a=0$ så $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(0) = 1$

Vi setter inn og får

$$(T_n f)(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Eks 2. Taylorpolynomene til $f(x) = \sin x$, $a=0$

Må finne de deriverte

$f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$,

$f'''(x) = -\cos x$, $f^{iv}(x) = \sin x$

Dermed $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$

$f'''(0) = -1$, $f^{iv}(0) = 0$, $f^{v}(0) = 1$, $f^{vi}(0) = 0, \ldots$

$$T_n \sin x = 0 + x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$

$$T_{2n-1}\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = T_{2n}\sin x$$

Eks. 3. $f(x) = \cos x$, $a=0$

$$T_{2n}\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Oppsummert

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$