Restleddet i Taylors formel

Generelt har vi ofte to feilkilder:

- den matematiske feilen fordi vi tilnærmer noe komplisert med noe enkelt
- Avrundingsfeil.

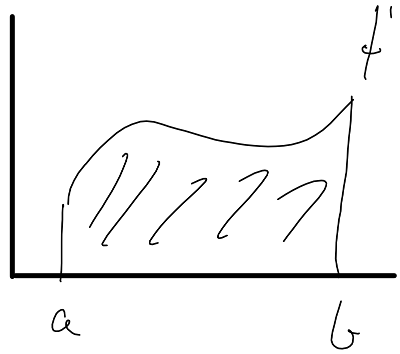
Nå er det fokus på første type feil

Restledd

Vi starter med analysens fundamentalteorem.

Hvis f er en funksjon så er

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(t)\,dt$$

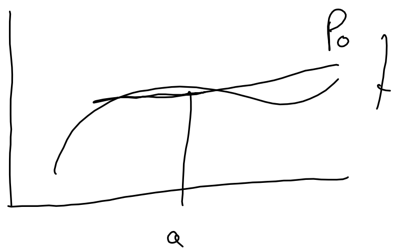


Sett $b=x$

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\,dt$$

Hvis vi tilnærmer $f(x)$ med den konstante funksjonen $T_0f(x)=$ $P_0(x)=f(a)$, er feilen gitt ved

$$\int_a^x f'(t)\,dt$$



Ved hjelp av delvis integrasjon skal vi nå finne ut hva feilen er for Taylor av grad 1.

Utgangspunkt $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,dt.$

Vi skal bruke delvis integrasjon på integralet

Delvis integrasjon: $\int_a^b u v' = u \cdot v - \int_a^b u' v$, u, v funksjoner

Vi setter $u = f'$ og $v' = 1$, $u' = f''$

$v(t) = t - b$

$$\int_a^b f'(t)\,dt = \int_a^b 1 \cdot f'(t)\,dt$$

$$= \Big[f'(t)(t-b)\Big]_a^b - \int_a^b f''(t)(t-b)\,dt$$

$$= 0 - f'(a)(a-b) - \int_a^b f''(t)(t-b)\,dt$$

$$= (b-a)f'(a) - \int_a^b f''(t)(t-b)\,dt$$

Vi setter inn i

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,dt = f(a) + (b-a)f'(a) - \int_a^b f''(t)(t-b)\,dt$$

$$= f(a) + (b-a)f'(a) + \int_a^b f''(t)(b-t)\,dt$$

Sett $b = x$

$$f(x) = \underbrace{f(a) + (x-a)f'(a)}_{T_1 f(x)} + \int_a^x f''(t)(x-t)\,dt$$

Generell formel

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) + \underbrace{\cdots + \frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a)}_{T_n f(x)} + \underbrace{\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt}_{R_n f(x)}$$

Alternativ feilformel:

$$R_n f(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$$ kan også skrives

$$R_n f(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)\,,$$ der $c \in (a,x)$ og c avhenger av x.

Eksempel ~~Anta at~~ Vi ønsker å regne ut e med feil mindre enn 10^{-3}.

Vi vet at

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = T_n f(x).$$

Dermed er

$$(x=1) \quad e = e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

Hvor stor må n være for at feilen skal bli mindre enn 10^{-3}?

Eller: Hvor stor må n være for at feilleddet skal være mindre enn 10^{-3}?

$$R_n f(x) = \frac{1}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c), \quad c \in (a, x)$$

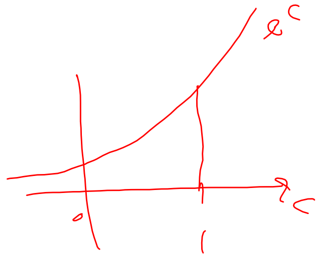
$a = 0$, $f(x) = e^x$

$$= \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} e^c$$

Dessuten er $x = 1$ så $a = 0$, $x = 1$

$$|R_n f(1)| = \left|\frac{1}{(n+1)!} 1^{n+1} e^c\right| = \left|\frac{e^c}{(n+1)!}\right|, \quad c \in (0,1)$$

$$\leq \left|\frac{e}{(n+1)!}\right| < \left|\frac{3}{(n+1)!}\right| = \frac{3}{(n+1)!}.$$



Dette blir første gang mindre enn 10^{-3} når $n = 6$.

$$\frac{3}{(n+1)!} \leq 10^{-3} \quad \vdots$$

$$(n+1)! \geq 3000 \qquad 7! = 5040$$

$n = 6$ - OK.

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720}$$

Eks. 2. Beregn $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ med feil mindre enn 10^{-4}.

Erstatt $\sin x$ med sitt Taylorpolynom av grad $2n-1$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx \approx \int_0^1 \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right)}{x}\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!}\right)dx$$