Modellering med differensligninger

Kalkulus 4.1.9.

Vi ser på sekvenser av 0'er og 1'er der første siffer er 1 og det er aldri to nuller etter hverandre. La a_n være antall slike sekvenser av lengde n.
Forklar at
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\,,\ n \geq 2\,,\quad a_1 = a_2 = 1$$

$n=1$ $\boxed{1}$ $a_1 = 1$

$n=2$ $\boxed{10}$ $a_2 = 1$

$n=3$ Legg til 0 på $\boxed{10}$ som gir $\boxed{100}$

Legg til 01 på $\boxed{1}$ som gir $\boxed{101}$

Anta at vi har en godkjent sekvens av lengde $n-1$

$$\boxed{d_1 d_2 d_3 \ldots d_{n-1}} \to \boxed{d_1 d_2 d_3 \ldots d_{n-1}\, 0}$$

Vi kan alltid legge på en 0 på slutten

Vi kan ikke uten videre legge til 1 til slutt for da må vi ha 0 rett før. Men det betyr at vi kan legge til 01 på en sekvens av lengde $n-2$.

$$\boxed{d_1 d_2 \ldots d_{n-2}\, 0\, 1}$$

Altså er $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_1 = 1, a_2 = 1$

Fibonacci-ligningen:

Kar. lign. $r^2 - r - 1 = 0$, $r = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

Generell løsning:
$$a_n = C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$1 = a_1 = C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$1 = a_2 = C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$C = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $D = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ (ved regning).

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

<u>4.1.13.</u> Sykdom. Av de som er syke en uke vil 25% være syke uken etter. Sykdommen har en inkubasjonstid på to uker og en person som var syk for to uker siden vil i gjennomsnitt føre til at $\frac{5}{4}$ person er syk denne uken.

La x_n være antall syke i uke n.

$$x_n = \frac{1}{4} x_{n-1} + \frac{5}{4} x_{n-2} \quad , \quad x_n - \frac{1}{4} x_{n-1} - \frac{5}{4} x_{n-2} = 0$$

Generell løsning. Kar. ligning

$$r^2 - \frac{1}{4} r - \frac{5}{4} = 0 \quad , \quad r = \frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{5}{4}}$$

$$= \frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{81}{64}}$$

$$= +\frac{1}{8} \pm \frac{9}{8}$$

$$r_1 = +\frac{10}{8} = +\frac{5}{4}$$

$$r_2 = \frac{1}{8} - \frac{9}{8} = -\frac{8}{8} = -1$$

$$x_n = C\left(\frac{5}{4}\right)^n + D(-1)^n$$

Vi har $x_0 = 190$, $x_1 = 260$

Bestemmer C og D

$$x_n = 160\left(5/4\right)^n + 30(-1)^n$$

$$= 200\left(5/4\right)^n \mp 10(-1)^n$$

Det viser seg at en person bare fører til at $\frac{3}{4}$ person blir syk etter to uker.

Hva skjer da?

$$x_n = \frac{1}{4} x_{n-1} + \frac{3}{4} x_{n-2}$$

Kar. ligning. $r^2 - \frac{1}{4} r - \frac{3}{4} = 0$

$$r = \frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{3}{4}}$$

$$r_1 = 1, \quad r_2 = -\frac{3}{4}$$

Gen. løsning $x_n = C + D\left(-3/4\right)^n$

230 -40

Oversikt over pensum

Kalkulus:

Kap. 1. Induksjon, binomialteoremet.

Kap. 2. Reelle tall, kompletthetsprinsippet

sup, inf.

Kap. 4. Differenslikninger

4.1 Homogene → oppskrifter

4.2 Inhomogene.

Kompendiet

Kap. 2. 0 og 1

Kap. 3. Siffersystemer - β-tallsystemet.

Hvilke tall har vi eksakt i β-tall 'systemet?

Kap. 4. Repr. av heltall, reelle tall og tekst.

- normaliserte representasjon.

Kap 5. Avrundingsfeil.

Subtraksjon av to nesten like tall

- kansellering.

Omskriving av formler

Relativ og absolutt feil

Kap. 6. Simulering av differenslikninger

6.3 - programmering av differenslign.

6.5 - effekten av avrundingsfeil.

Repr. av tegn 128 tegn

ASCII - 1 byte (7 bit) - ikke norske bokstaver.

256

Iso Latin1 - 1 byte (8 bit) - norske bokstaver blant de siste 128 tegnene

- starten = ASCII.

UTF-8 - 1, 2, 3 eller 4 bytes

Kun ASCII som tar opp bare en byte.

UTF-16 - 2 eller 4 bytes

UTF-32 - 4 bytes

16 Generell løsning

$$x_n = C\,2^{-n} + D\,(-4)^n$$

Da er kar. ligning

$$(r - \tfrac{1}{2})(r+4) = 0$$

$$r^2 - \tfrac{1}{2} r + 4r - 2 = 0$$

$$r^2 + \tfrac{7}{2} r - 2 = 0$$

$$2r^2 + 7r - 4 = 0$$

$$2x_{n+2} + 7x_{n+1} - 4x_n = 0$$