MAT-INF1100, 17/8-15

Notasjon, summetegn.

$\mathbb{N}$ - naturlige tall $\{1,2,3,4,5,6 \dots \dots\}$

$\mathbb{Z}$ - de hele tallene: $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

6 3 $6 = 2 \cdot 3$

a er delelig med b: $a = q \cdot b$, $q \in \mathbb{N}$

a er delelig med b hvis og bare hvis

$a = q \cdot b$ for et heltall $q > 1$.

Hvis a ikke er delelig med noe heltall

så sier vi at a er et primtall

Faktorisering: Et naturlig tall $a > 1$ kan

skrives som et produkt av primtall

på en entydig måte

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n$$

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

Partall $= \{2, 4, 6, 8, \ldots\} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Oddetall $= \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\} = \{2n-1 \mid n \in \mathbb{N}\}$

Summetegn

Vi skriver $1+2+3+4+\cdots+100$

som $\sum_{n=1}^{100} n$

$$2+4+6+8+\cdots+100 = \sum_{n=1}^{50} 2n$$

Generelt skriver vi

$$\sum_{n=k}^{m} a_n = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_m$$

Egenskaper ved summetegn

(i) $\sum_{n=k}^{m} a_n + \sum_{n=k}^{m} b_n = \sum_{n=k}^{m} (a_n + b_n)$

(ii) $\sum_{n=k}^{m} c \cdot a_n = c \sum_{n=k}^{m} a_n$, c - tall

(iii) $\sum_{n=k}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{l} a_n = \sum_{n=k}^{l} a_n$

Bevis for (ii)

$$\sum_{n=k}^{m} c \cdot a_n = c \cdot a_k + c \cdot a_{k+1} + c \cdot a_{k+2} + \dots + c \cdot a_m$$

$$= c\,(a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_m)$$

$$= c \cdot \sum_{n=k}^{m} a_n$$

Eksempel: $1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{17} = \sum_{n=0}^{17} (-1)^n x^n$

Bytte av summasjonsindeks:

Vi har to summer:

$$\sum_{k=-3}^{11} (-1)^k x^{k+3} \quad , \quad \sum_{k=0}^{14} (-1)^{k+1} x^k$$

Vis at de er like! Vi begynner med venstre sum:

$\sum_{k=-3}^{11} (-1)^k x^{k+3}$. Innfører ny variabel

$i = k+3$, $k = -3 \Rightarrow i = 0$

$k = i-3$ $k = 11 \Rightarrow i = 14$

$$= \sum_{i=0}^{14} (-1)^{i-3} x^i$$

, Merk at $(-1)^{i-3} = (-1)^{i-3} \cdot (-1)^4 = (-1)^{i+1}$, $(-1)^4 = 1$

$$= \sum_{i=0}^{14} (-1)^{i+1} x^i$$