Induksjonsbevis

Vi har ofte behov for å summere de n første naturlige tallene, så hva er

$1+2+3+4+\cdots+n=\sum_{i=1}^{n} i$?

$\sum_{i=1}^{1} i = 1$, $\sum_{i=1}^{2} i = 1+2 = 3$, $\sum_{i=1}^{3} i = \sum_{i=1}^{2} i + 3 = 3+3 = 6$

$\sum_{i=1}^{4} i = \sum_{i=1}^{3} i + 4 = 6+4 = 10$

Fins det noen enkel måte å summere slike tall ?

Det viser seg at formelen

$$(\#) \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = S_n ,$$

$S_1 = 1$, $S_2 = 3$, $S_3 = 6$, $S_4 = 10$

holder for $n = 1, 2, 3, 4$

Hvordan kan vi vise at (#) holder for alle mulige verdier av n?

Vi har sjekket at $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = S_n$

holder for $n = 1, 2, 3, 4$.

$n=5$

$$\sum_{i=1}^{5} i = \sum_{i=1}^{4} i + 5 = 10 + 5 = 15, \qquad S_n = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$$

Anta at vi fortsetter å sjekke og at formlen stemmer for $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, k$.

Stemmer det for $n = k+1$?

Da vet vi at det stemte for $n = k$,

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$$

Hva da med $\sum_{i=1}^{k+1} i$, blir det $S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$?

(Husk at $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$, så når $n = k+1$

Vi har $$\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^{k} i + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) = (k+1)\left(\frac{k}{2} + \frac{2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(k+1)(k+2) = S_{k+1}$$

Så formelen stemmer for $n = k+1$ hvis den stemte for $n = 1, 2, 3, \ldots, k$.

Hva betyr dette?

$\surd$ $\surd$ $\surd$ $\surd$ $k \rightarrow k+1$ $\surd$ k $k+1$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, . . .

$k \rightarrow k+1$

Hvis det stemmer for $n = 1, 2, \ldots, k$ så stemmer det også for $n = k+1$.

Siden vi alltid kan komme fra k til $k+1$ og påstanden er sann når $n = 1$, må påstanden (formelen) være sann for alle mulige naturlige tall n.

Generelt induksjonsbevis

Anta at vi har mange utsagn vi skal vise er sanne, P_n, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ $n \in \mathbb{N}$

(Eks: P_n, $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$)

Vi prøver følgende:

(i) Sjekk at P_1 er sann

(ii) Anta at P_k er riktig og bruk dette til å vise at P_{k+1} er riktig.

Hvis både (i) og (ii) går bra er P_n sann for alle $n \in \mathbb{N}$.

Eksempel. Vis at $n(n^2+5)$ er delelig med 6 for alle naturlige tall n.

P_n: $n(n^2+5) = m \cdot 6$ for $m \in \mathbb{N}$

Sjekk for $n=1$. $n(n^2+5) = 1 \cdot (1+5) = 6$ – delelig med 6.

Sjekk for $n=2$. $2(2^2+5) = 2 \cdot 9 = 18 = 6 \cdot 3$ – OK.

Anta at P_n er sann for $n=k$, er den da sann for $n=k+1$?

Vi vet altså at $k(k^2+5)$ inneholder 6 som faktor.

Må vise at 6 også er faktor i $(k+1)((k+1)^2+5)$.

$$(k+1)((k+1)^2+5) = k((k+1)^2+5) + (k+1)^2+5$$
$$= k(k^2+2k+1+5) + (k+1)^2+5$$
$$= k(k^2+5) + k(2k+1) + (k+1)^2+5$$
$$= k(k^2+5) + 2k^2+k + k^2+2k+1+5$$
$$= k(k^2+5) + 3k^2+3k+6$$
$$= k(k^2+5) + 3k(k+1) + 6$$

Vi vet at 6 er faktor i $k(k^2+5)$ ved antagelse og siden en av k og $k+1$ er partall vil 6 også være en faktor i $3k(k+1)$.