Reelle tall

Vi betegner de reelle tallene med $\mathbb{R}$.

Intervallene er vanlige delmengder:

Lukket intervall $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

$[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$

$(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$

Åpne intervaller:

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

(a,∞) - - - -

Tallverdi

Tallverdien til $a \in \mathbb{R}$ er definert ved

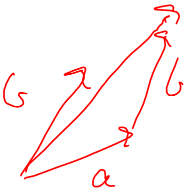
$$|a| = \begin{cases} a, & a \ge 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

$|2| = 2$, $|-2| = 2$, $|0| = 0$

Merk at $a \le |a|$, $-a \le |a|$, $|a| = \max(a, -a)$

Trekantulikheten.

$$|a+b| \le |a| + |b|$$



for alle $a, b \in \mathbb{R}$.

Bevis. Vi vet at $a \le |a|$, $b \le |b|$

så $a+b \le |a| + |b|$.

Vet også $-a \le |a|$, $-b \le |b|$

$$-(a+b) = -a - b \le |a| + |b|$$

Husk at $|a+b| = \max(a+b, -(a+b))$

Derfor

$$|a+b| \le |a| + |b|$$

Rasjonale og irrasjonale tall.

Et reelt tall x som kan skrives som en brøk $\frac{a}{b}$, $a,b \in \mathbb{Z}$, kalles et rasjonalt tall. Mengden av alle rasjonale tall kalles $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a,b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}$$

Merk at $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Et reelt tall som ikke er rasjonalt sies å være irrasjonalt.

Setning. Hvis x og y er rasjonale tall så er $x+y$, $x-y$, xy og x/y $(y \neq 0)$ også rasjonale tall.

Korollar. Dersom en av x og y er rasjonal og den andre irrasjonal så er $x+y$ og $x-y$ irrasjonale.

Bevis. Anta at x er en brøk og y irrasjonal. Vi skal vise at $a = x+y$ er irrasjonal. Anta at det ikke stemmer, altså at a er en brøk. $a = x+y$ så $y = a-x$. Men dette er bare tøys!! Altså har jeg gjort noe galt. Eneste mulighet er at a ikke er en brøk, men et irrasjonalt tall.

Lemma Hvis $a \in \mathbb{N}$ er et oddetall så er også a^2 et oddetall.

Bevis: Anta at $a = 2n-1$ for en $n \in \mathbb{N}$

Da er $a^2 = (2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1$ - oddetall :)

Korollar. Hvis b^2 er et partall så må b også være et partall. , $b \in \mathbb{N}$

Teorem. $\sqrt{2}$ er irrasjonal.

Bevis. Vi må vise at $\sqrt{2}$ ikke er en brøk. Anta det motsatte, vi skal se at da får vi en selvmotsigelse.

Hvis $\sqrt{2}$ er en brøk fins det $a, b \in \mathbb{N}$ der a og b ikke har felles faktorer og

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Da er $2 = \frac{a^2}{b^2}$ så $a^2 = 2b^2$ så a^2 er et partall. Men da må a også være et partall. Altså er $\boxed{a = 2n}$ for $n \in \mathbb{N}$

Innsatt i $a^2 = 2b^2$ gir det $\boxed{(2n)^2 = 2b^2}$ så $\boxed{4n^2 = 2b^2}$ eller $\boxed{b^2 = 2n^2}$

Dermed er b^2 et partall så b må også være et partall.

Med andre ord, både a og b er partall.

Men de skulle ikke ha felles faktor?

Eneste mulighet: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ er feil så $\sqrt{2}$ er irrasjonal.